

Rundbrief 220

1/2022



1 $x^2 - 9 = 0$

Ihre Wahl:

- 1 nicht lösbar
- 2 $x = -3$ oder $x = 3$
- 3 $x = 9$

Net-Mathebuch

Das digitale Mathematikschulbuch für die gymnasiale Oberstufe

– Neue Konzepte erkunden und einsetzen –

Inhaltsverzeichnis

Einführung **3**

Ein digitales Schulbuch im Mathematikunterricht einsetzen

(Abdruck aus Brnic, M., & Greefrath G. (2021). Ein digitales Schulbuch im Mathematikunterricht einsetzen. *MNU-Journal*, 74(3), 224–231.)

- Potenzial des digitalen Schulbuchs **5**
- Struktur des Net-Mathebuches **8**
- U-Reihe zu bedingten Wahrscheinlichkeiten **10**
- Das Projekt KomNetMath **18**
- Erste Forschungsergebnisse **20**

Neu: Der Vorkurs im Net-Mathebuch **24**

(von Heinz Böer)

- Zum Vorkurs **25**
 - Selbstlernkonzept im Vorkurs
 - Eingangstest
- Neues Material im Analysis-Einführungskurs **28**
 - Steigungsverhalten von Funktionsgraphen
 - Steigung in der Alltagssprache
 - Geschwindigkeit
 - Benzinverbrauch

Links zu diesem Rundbrief **33**

Impressum

MUED e.V., Windthorststr. 7, 48143 Münster

Tel. 0251-97957799, Fax: 0251-97957797

e-mail: mued@mued.de, <http://www.mued.de>

Redaktion dieses Rundbriefs: Heinz Böer, Maxim Brnic

Einführung

Im Rundbrief 2-2021 wurde das digitale Mathebuch schon vorgestellt. Hier kommt eine Fortsetzung – passend zum Tagungsthema 2022 „Digitalität im Mathe-Unterricht“.

Im ersten Teil werden durch die wissenschaftliche Begleitung (Projekt KomNetMath der Uni Münster) die Potenziale des Net-Mathebuchs mit dessen digitalen Mathematikwerkzeugen herausgestellt. Wie diese in den Unterricht integriert werden können, wird anhand einer Unterrichtsreihe zur bedingten Wahrscheinlichkeit aufgezeigt. Außerdem wird der Forschungsprozess mit ersten Ergebnissen vorgestellt.

Im zweiten Teil werden einige Neuerungen präsentiert, die im Net-Mathebuch inzwischen realisiert wurden. Vorgestellt wird die Integration des bisherigen Vertiefungskurses in den neuen Vorkurs (Wiederholung von Sek.I-Stoff) und in die Kapitel zur Analysis in der Einführungsphase. Mit den neuen dynamischen Elementen wird der Vorkurs auch für die Wiederholung in der Klasse 10 interessanter – zur Vorbereitung auf die zentrale Abschlussklausur.

Viele weitere Materialien sind seit einem Jahr im Net-Mathebuch aufgenommen worden. Das Autorenteam arbeitet permanent – mit wöchentlichen Absprachetreffen – an der Weiterentwicklung.

Schauen Sie sich die Materialien unter www.m2.net-schulbuch.de an. Der Vorkurs ist für Sie und Ihre Schülerinnen frei zugänglich. Unter „Leseprobe“ (oben rechts) können Sie sich einen Gastzugang für begrenzte Zeit zur Einsicht in das ganze Mathe-Buch bestellen.

Ich wünsche Ihnen viel Lese- und Ausprobierversnügen mit diesem Rundbrief und dem Net-Mathebuch.

Ein digitales Schulbuch im Mathematikunterricht einsetzen

Im Projekt KomNetMath wird der Einsatz und die Nutzung des digitalen Mathematikschulbuchs Net-Mathebuch untersucht. Dieses zeichnet sich durch die Integration digitaler Werkzeuge aus und bildet die Potenziale digitaler Schulbücher ab. Im Rahmen des Projektes wurde eine Unterrichtsreihe zur bedingten Wahrscheinlichkeit entwickelt und evaluiert. Die Unterrichtsreihe und erste Forschungsergebnisse werden in diesem Beitrag vorgestellt.

1. Einführung

Die Strategie der Kultusministerkonferenz zur Bildung in der digitalen Welt (KMK, 2016, S. 12) beschreibt Kompetenzen für eine aktive, selbstbestimmte Teilhabe in einer digitalen Welt, die einen integrativen Teil der Fachcurricula aller Fächer darstellen sollen. Bei der Gestaltung von Lehr- und Lernprozessen können für diesen Kompetenzerwerb digitale Medien und Werkzeuge, etwa realisiert in Lernumgebungen und digitalen Schulbüchern, eingesetzt werden. Für den Mathematikunterricht kann man hier zwischen der Nutzung von allgemeinen Medien, von Medien zum Lernen von Mathematik und von speziellen digitalen Mathematikwerkzeugen unterscheiden. Ein digitales Schulbuch für das Fach Mathematik vereint alle diese Nutzungsmöglichkeiten. Während die *speziellen digitalen Mathematikwerkzeuge* wie eine dynamische Geometriesoftware, eine Tabellenkalkulation oder ein Computeralgebrasystem direkt aus dem Schulbuch heraus angesteuert werden können, können *Medien zum*

Lernen von Mathematik durch in das Schulbuch integrierte digitale Lernumgebungen sowie mathematikspezifische Apps abgebildet werden. *Allgemeine Medien* zur Kommunikation und Präsentation, aber auch zum Suchen, Verarbeiten und Aufbewahren (KMK, 2016, S. 16 f.) können ebenfalls in einem digitalen Schulbuch wiedergefunden werden. In diesem Beitrag berichten wir von dem Projekt *KomNetMath – Kompetenter Umgang mit einem integrierten digitalen Schulbuch (Net-Mathebuch) für den Mathematikunterricht*, welches ein konkretes digitales Mathematikschulbuch für die Oberstufe in den Fokus nimmt und für welches eine Unterrichtsreihe entwickelt wurde. Das Projekt untersucht die tatsächliche Nutzung eines digitalen Schulbuchs mit integrierten digitalen Werkzeugen aus fachdidaktischer Perspektive und wird von der Medienberatung NRW seit Dezember 2018 gefördert. In dem Projekt KomNetMath wird das digitale Mathematikschulbuch Net-Mathebuch (s. www.m2.net-schulbuch.de, Abb. 1) genutzt, welches von der gemeinnützigen Unternehmergesellschaft Net-Schulbuch.de (www.net-schulbuch.de) herausgegeben wird.



Abb. 1. QR-Code zum Net-Mathebuch, www.m2.net-schulbuch.de

2. Potenziale des digitalen Schulbuchs

Ein digitales Schulbuch eignet sich aufgrund seiner Potenziale in besonderer Weise zum Lernen von Mathematik sowie zur Nutzung spezieller digitaler Mathematikwerkzeuge. Zusammenfassend werden folgende Potenziale in besonderer Weise genannt, die jeweils anhand von inhaltlichen und technischen Features des Net-Mathebuchs in der

Tabelle 1 charakterisiert werden (CHOPPIN, CARSONS, BORYS, CEROSALETTI, & GILLIS, 2014; REZAT, 2020):

Potenziale digitaler Schulbücher	Beispiele aus dem Net-Mathebuch
Nutzung von Multimedia	Lernvideos; Animationen; Simulationen; Pop-Up-Fenster und Tooltips; Lückentexte; Diashows; ...
Interaktivität	Interaktive Aufgaben, z.B. durch GeoGebra-Apps; Aufgaben mit Auswahlmöglichkeiten durch Checkboxen oder Radiobuttons; Zuordnungsaufgaben; ...
Soziale Aspekte und Kommunikation	Uploadfunktion für eigene Materialien; ...
Anpassung der Lernerfahrung	Anpassung an individuelle Bedürfnisse und Lernstile, z.B. durch das Setzen von Lesezeichen und Links; Freischaltung von Lösungen durch die Lehrkraft; ...
Fortwährendes Assessment / Dokumentieren des Lernprozesses	Einbindung unterschiedlicher Feedbackarten; Druck- und Speichermöglichkeit; ...
Ökonomische Vorteile	Schnelle Überarbeitungsmöglichkeit der Inhalte und Features eines digitalen Schulbuchs durch die Redaktion; Einbindung aktueller Kontexte; ...

Tab. 1. Potenziale digitaler Schulbücher mit Beispielen aus dem Net-Mathebuch

Ein digitales Schulbuch kann also Möglichkeiten für einen adaptiven Unterricht bereitstellen, der auf die individuellen Lehr- und Lernprozesse und Bedürfnisse der Lernenden und Lehrkräfte eingeht, aber auch das gemeinsame Arbeiten mithilfe diverser Funktionen zur Kommunikation und Kooperation ermöglichen (REZAT, 2020). Die Vermittlung des Lerngegenstands, welcher durch curriculare oder bildungspolitische Vorgaben beschrieben ist, sollte dabei trotz der vielfältigen Gestaltungsmöglichkeiten stets im Vordergrund stehen. Für die Nutzung eines digitalen Schulbuchs ist außerdem eine entsprechende technische Ausstattung notwendig. Die Schüler/innen und Lehrkräfte sollten Endgeräte mit Internetzugang zur Verfügung haben, die sie auch zu Hause für den Schulgebrauch einsetzen können.

In dem Projekt KomNetMath wird das digitale Mathematikschulbuch *Net-Mathebuch* verwendet, welches eine komplette digitale Neukonzeption ist – es gibt also kein analoges Parallelprodukt. Es deckt die Inhalte der gymnasialen Oberstufe ab, wobei integrierte Lehrer/innen-Hinweise auf die jeweilige Verortung im Net-Mathebuch verweisen. Zur Navigation hat jede Seite im Net-Mathebuch eine eindeutig identifizierbare Kennung. Dieser sogenannte *Net-Code* besteht aus einer Buchstabenkombination und ist mit der Seitenzahl eines klassischen Schulbuchs vergleichbar. Auf jeder Seite befindet sich der Net-Code stets oben im Header und kann darüber ebenfalls angesteuert werden. So ist bei den hier beschriebenen Seiten der jeweilige Net-Code stets angegeben. Das Net-Mathebuch wurde ursprünglich für Schulen in Nordrhein-Westfalen konzipiert, wird mittlerweile aber auch in anderen Bundesländern eingesetzt. Die Inhalte und Funktionen des Net-Mathebuchs werden durch die zugehörige Redaktion fortlaufend gewartet, aktualisiert und weiterentwickelt.

Das Net-Mathebuch greift die Potenziale eines digitalen Schulbuchs auf verschiedenste Weise auf und ist somit für eine mathematikdidaktische Studie zum Einsatz eines digitalen Schulbuchs prädestiniert. Es handelt sich um ein interaktives, digitales Mathematikschulbuch, welches sich insbesondere durch eine ständige Bereitstellung und Integration von digitalen Werkzeugen im Vergleich zu analogen Schulbüchern auszeichnet. Hervorzuheben ist die Einbindung von GeoGebra, die sowohl aufgabenspezifisch als auch aufgabenunspezifisch erfolgt. Über das Net-Mathebuch ist ein direkter Zugriff auf die klassische GeoGebra-Oberfläche, aber auch auf den GeoGebra 3D-Rechner und den GeoGebra-Taschenrechner möglich. Darüber hinaus sind zahlreiche von der Redaktion entwickelte GeoGebra-Apps vorzufinden, die für einzelne Aufgaben konzipiert sind oder für einen größeren Themenbereich eingesetzt werden können (Eine App-Übersicht finden Sie unter dem Net-Code: *q_geogebra*tab). Diverse GeoGebra-Apps und technische bzw. inhaltliche Features werden in der Unterrichtsreihe zum Schwerpunkt „bedingte Wahrscheinlichkeiten“ aufgegriffen. Charakteristisch für dieses digitale Schulbuch ist dabei neben der Integration dieser unterschiedlichen Elemente der strukturelle Aufbau des Buches.

3. Struktur des Net-Mathebuchs

Die Struktur der einzelnen inhaltlichen Kapitel bzw. Themen spiegelt sich in der Aufbereitung des Buches durch entsprechende Reiter wider (Abb. 2). Die Aufteilung eines Themas folgt dabei in der Regel dem Dreischritt: *Erforschen – Lehrtext – Aufgaben*. Durch die *Erforschen*-Seite wird den Lernenden ein erster und niedrigschwelliger Zugang zum jeweiligen Thema ermöglicht. Das *Erforschen* enthält Aufträge bzw. Aufgaben, die

durch gestufte Hilfen und interaktive Elemente ergänzt werden sowie eine zusammenfassende Ergebnissicherung anbieten. Vereinzelt werden alternative Zugänge zu einem Thema angeboten, die von Lehrkräften oder Lernenden ausgewählt werden können. Beispielsweise wird bei der Einführung der Binomialverteilung ein Zugang über das Galtonbrett (*Erforschen 1*) oder über einen Multiple-Choice-Test (*Erforschen 2*) angeboten (Net-Code: bacf).

Im *Lehrtext* werden dann die jeweils relevanten und wichtigen Definitionen und Sätze eingeführt und Beispiele gegeben. Die sich anschließenden *Aufgaben* sind nach *Basisaufgaben*, *Aufgaben 1* und *Aufgaben 2* unterteilt. Der Schwierigkeitsgrad einer Einzelaufgabe ist zusätzlich gekennzeichnet. Bei den *Basisaufgaben* handelt es sich um grundlegende Aufgaben, die sich an das Gelernte aus dem *Erforschen* und dem *Lehrtext* anschließen. Die *Erforschen-Aufgaben* und die *Basisaufgaben* stellen viele Tipps, Hinweise und interaktive Elemente bereit. Diese stehen bei den *Aufgaben 1* und *Aufgaben 2* teilweise nicht mehr zur Verfügung. Das Ziel ist, dass die Lernenden Aufgaben auch ohne entsprechende Hilfen lösen können. Insbesondere die *Aufgaben 2* unterscheiden sich im Anwendungsbezug oder in ihrer Komplexität von den *Aufgaben 1* und werden auch als „weiterführende Aufgaben“ aufgefasst. Durch die Aufteilung und Unterscheidung der Aufgaben soll ein differenziertes Angebot bereitgestellt und damit individuelles Lernen ermöglicht werden.

Bei dem hier vorgestellten Dreischritt – *Erforschen*, *Lehrtext*, *Aufgaben* – handelt es sich um eine prototypische Unterteilung eines Kapitels, welches bei anderen Themen durch weitere Aspekte bzw. Reiter ergänzt oder variiert wird. Bei Ergänzungen kann es sich beispielsweise um einen sogenannten *Check* handeln. Ein solcher Verständnischeck greift

bereits bekanntes Wissen auf und kann dieses ggfs. wieder auffrischen. Hingegen kann eine *Vertiefung* eine tiefere Auseinandersetzung mit der jeweiligen Thematik ermöglichen, die auch über den Lehrplan hinausgehen kann.

The screenshot shows a web browser interface. At the top, there is a search bar with the text 'aabb_index' and a 'GO' button. Below the search bar is a navigation menu with the following items: 'Startseite', 'Einführungsphase', 'Stochastik', 'Bed. Wahrscheinlichkeit', and 'Bayes-Wahrscheinlichkeit'. Below the navigation menu is a secondary menu with the following items: 'Erforschen 1', 'Erforschen 2', 'Lehrtext', 'Basisaufgaben', 'Aufgaben 1', and 'Aufgaben 2'. The main content area is titled 'Bedingte Wahrscheinlichkeiten & der Satz von Bayes - Erforschen 1'. Below this title is a sub-section titled 'Der HIV Heimtest'. The text in this section discusses HIV home tests, their accuracy, and the importance of understanding the results. It includes a list of bullet points and a reference to the Robert-Koch-Institut. To the right of the text is a large red ribbon icon, a symbol for HIV awareness. At the bottom right of the page, there are several small icons: a network of nodes, a printer, a magnifying glass, and a cursor.

Abb. 2. Navigation und struktureller Aufbau des Net-Mathebuchs am Beispiel des Kapitels „Bedingte Wahrscheinlichkeiten und der Satz von Bayes“ (Net-Code: aabb)

4. Unterrichtsreihe zu bedingten Wahrscheinlichkeiten

Im Rahmen des Projektes wurde eine fünfstündige Unterrichtsreihe (à 45 Minuten) mit dem Schwerpunkt „bedingte Wahrscheinlichkeiten“ konzipiert. Die Reihe basiert auf dem Kapitel *Bedingte Wahrscheinlichkeiten und der Satz von Bayes* im Net-Mathebuch (Net-Code: aabb).

Das Themenfeld eignet sich für die Durchführung einer Studie zur Nutzung und zur Abbildung der Potenziale eines digitalen Mathematikschulbuchs auf besondere Weise, da sich dieses durch diverse Darstellungswechsel, die Ermöglichung individueller Zugänge und die Integration authentischer Kontexte auszeichnet. Die Voraussetzungen zur Behandlung dieses Themas und die beiden zentralen Erforschen-Aufgaben der Unterrichtsreihe werden im Folgenden vorgestellt. Außerdem wird auf die relevanten Features und Mathematikwerkzeuge in diesem Kapitel eingegangen, die einen potenziellen Mehrwert zu analogen Materialien haben können.

Unterrichtliche Voraussetzungen

Die Durchführung einer Unterrichtsreihe, die auf dem genannten Kapitel aufgebaut ist, setzt inhaltliche bzw. stochastische Vorkenntnisse voraus. Die Lernenden sollten bereits im Umgang mit Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen geübt sein. Dies bedeutet, dass sie bereits zweistufige Zufallsexperimente und Daten in einem Baumdiagramm bzw. einer Vierfeldertafel darstellen und Wahrscheinlichkeiten, zum Beispiel per Pfadregeln, berechnen können. Dagegen sollte der Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“ und dessen Berechnung noch nicht explizit definiert bzw. eingeführt worden sein, da dies in der Unterrichtsreihe thematisiert wird. Rechnungen können entweder per im Net-Mathebuch angefügten GeoGebra-Taschenrechner oder per separatem Hilfsmittel, zum Beispiel einem grafikfähigen Taschenrechner, durchgeführt werden.

Aufbau der Unterrichtsreihe

Es werden zwei unterschiedliche Erforschen-Zugänge für die Erarbeitung der bedingten Wahrscheinlichkeiten im Net-Mathebuch

angeboten (Erforschen 1 und Erforschen 2). Sie setzen jeweils spezifische Schwerpunkte, beispielsweise sollen für das Übertragen der gegebenen Daten unterschiedliche Darstellungsformen genutzt werden. Beide Zugänge greifen aber die Empfehlung auf, dass zum Verständnis bedingter Wahrscheinlichkeiten zuerst eine Darstellung der Daten mit absoluten Häufigkeiten erstellt werden soll (KRÜGER, SILL & SIKORA, 2015, 191). Es werden realweltliche und aktuelle Kontexte behandelt, zu denen Hintergrundinformationen direkt aufgerufen werden können. Beide Zugänge eignen sich somit für eine reflektierte Auseinandersetzung und Interpretation gegebener Daten und diagnostischer Tests. Aus diesen Gründen sollen beide Zugänge in der entwickelten Unterrichtsreihe bearbeitet werden. Zu beiden Zugängen finden sich im Kapitel vergleichbare Aufgaben, die anschließend gemacht werden können. Aus diesen und weiteren didaktischen Überlegungen wurde eine Unterrichtsreihe entwickelt, die in drei chronologische Einheiten aufgefasst werden kann:

1. Einheit: *Erforschen 2* („Morden im Norden“) mit anschließender Übungsaufgabe
2. Einheit: *Erforschen 1* („HIV-Heimtest“) mit anschließender Übungsaufgabe
3. Einheit: Übungsphase mit weiteren Aufgaben

Diese Aufteilung ist bereits mit unterschiedlichen Kursen und Schulformen erprobt worden und kann in dieser Form für den eigenen Unterricht übernommen werden. Es ist aber auch eine andere Reihenfolge denkbar, da insbesondere die ersten beiden Einheiten getauscht oder die Erforschen-Zugänge arbeitsteilig erarbeitet werden

können. Die Aufgaben eignen sich zum selbstständigen Arbeiten, da die Lösungen durch die Lehrkraft im Net-Mathebuch freigeschaltet werden können und die Problemstellungen der Erforschen-Aufträge bereits vorgegeben sind. Die Aufgaben können durch die Lehrkraft begleitet werden, indem zum Beispiel der Einstieg und die Sicherung gemeinsam gestaltet werden. Auf diese Weise wird es für die Erarbeitung der Erforschen-Zugänge im Rahmen der Projektdurchführung vorgegeben. Welche didaktischen Besonderheiten und (digitalen) Potenziale insbesondere die in den ersten beiden Einheiten verwendeten Aufgaben haben, wird im Folgenden kurz vorgestellt.

4.1 Einheit: *Erforschen 2* („Morden im Norden“) mit anschließender Übungsaufgabe

In der Erforschen-Aufgabe „Morden im Norden“ des *Erforschen 2* stellen Lernende zu einem Sachkontext eine Vierfeldertafel auf und berechnen anschließend bedingte Wahrscheinlichkeiten. Insbesondere wenn in den vorigen Unterrichtseinheiten vorwiegend mit Vierfeldertafeln gearbeitet wurde, bietet sich diese als erste Aufgabe der Unterrichtsreihe an. Der Sachkontext behandelt hier einen (fiktiven) Kriminalfall, der in eine interessensweckende Geschichte eingebettet ist. Dabei soll per DNA-Analyse der/die potenzielle Täter/in gefunden werden. Die gegebenen und berechneten absoluten Häufigkeiten können in einer Vierfeldertafel eingetragen werden (Abb. 4). Anhand dieser Aufgabe kann die Schreib- und Sprechweise des Begriffs „bedingte Wahrscheinlichkeiten“ erstmalig eingeführt werden. Nach Bearbeitung der Aufgabe kann die *Aufgabe B1* der *Basisaufgaben* als sich anschließende Übungsaufgabe bearbeitet werden. Die Inhalte werden noch einmal aufgegriffen, da insbesondere

noch einmal auf die sprachliche und formelle Unterscheidung verschiedener Wahrscheinlichkeiten eingegangen wird (Abb. 3).

d. Ordnen Sie die Sprechweisen den entsprechenden Schreibweisen zu.

$P(A-)$		$P(A- B-)$	
$P(B- A-)$		$P(A+)$	
$P(A \cap B-)$			

Die Wahrscheinlichkeit von B- unter der Voraussetzung, dass A- bereits eingetreten ist.	Die Wahrscheinlichkeit von A- unter der Bedingung B-.	Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A+.	Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Gegenereignisses von A+.	Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten Ereignisses A- und des Ereignisses B-.
---	---	--	---	---

prüfen
löschen

Abb. 3. Teilaufgabe d der Basisaufgabe B1. Die Sprach- und Sprechweisen können einander zugeordnet werden (Net-Code: aabb_aufgaben)

4.2 Einheit: *Erforschen 1* („HIV-Heimtest“) mit anschließender Übungsaufgabe

In der Erforschen-Aufgabe „HIV-Heimtest“ des *Erforschen 1* geht es um die Zuverlässigkeit von HIV-Heimtests. In dieser Aufgabe wird die Notation der bedingten Wahrscheinlichkeit anhand von Tipps und einem Lückentext aufgegriffen. Zusätzlich werden in dieser Aufgabe die Begrifflichkeiten eines diagnostischen Testes (Prävalenz, Sensitivität, Spezifität und Vorhersagewert) erstmalig eingeführt. In dieser Aufgabe

sind relative Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten gegeben, die für ein leichteres Verständnis auf eine Population übertragen werden. Diese Aufgabe eignet sich insbesondere dann als Einstiegsaufgabe, wenn die medizinisch-technischen Begriffe früh eingeführt und gegebene Daten zuerst in ein Baumdiagramm eingetragen werden sollen (Abb. 5). Anhand dieser Aufgabe kann insbesondere mithilfe einer integrierten GeoGebra-App der Zusammenhang von Prävalenz, Sensitivität und Spezifität auf den Vorhersagewert erkundet werden (Abb. 4). Mithilfe dieser Visualisierung können unterschiedliche Zusammenhänge modelliert und eine Diskussion zu diagnostischen Tests ermöglicht werden. Auf die GeoGebra-App kann auch im späteren Verlauf einer Unterrichtsreihe verwiesen und sie somit unabhängig vom Einsatz der Aufgabe „HIV-Heimtest“ genutzt werden.

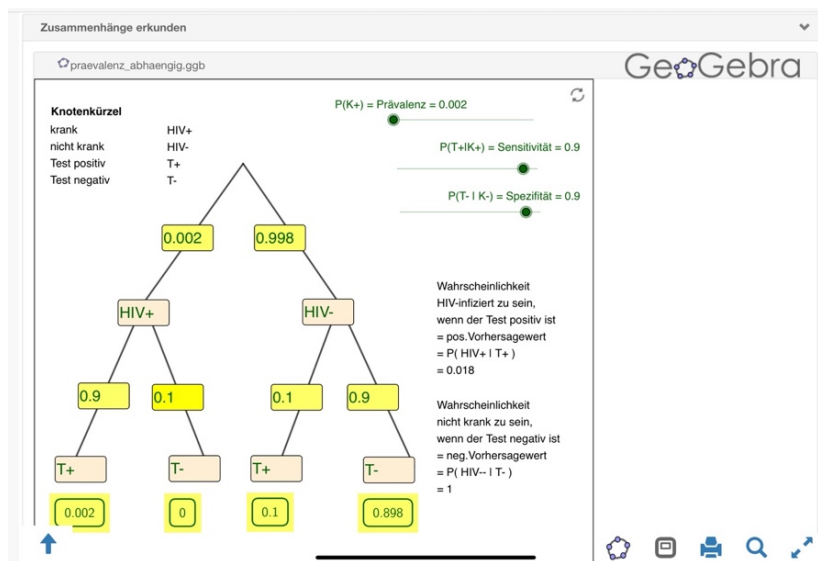


Abb. 4. Die GeoGebra-App „Sensispezibaum“ zum HIV-Heimtest im Erforschen 1 (Net-Code: aabb_index)

Im Anschluss zur „HIV-Heimtest“-Aufgabe kann die Aufgabe 1 unter *Aufgaben 1* bearbeitet werden. Diese Aufgabe zu einem Diabetestest hat vergleichbare Anforderungen und enthält interaktive Tipps und

Feedbackoptionen. Außerdem wird diese Aufgabe im *Lehrtext* als Beispielaufgabe aufgegriffen. In diesem Beispiel werden die unterschiedlichen Möglichkeiten zur Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit, d.h. per Vierfeldertafel, umgekehrten Baumdiagramm oder Satz von Bayes gegenübergestellt und veranschaulicht. Auf den *Lehrtext* kann spätestens an dieser Stelle der Unterrichtsreihe oder direkt nach Einführung der Berechnung und Schreibweise einer bedingten Wahrscheinlichkeit hingewiesen werden. Darüber hinaus enthält der *Lehrtext* u.a. ein ergänzendes Lernvideo zu bedingten Wahrscheinlichkeiten.

4.3 Einheit: Übungsphase

Übungsaufgaben können aus den *Basisaufgaben*, *Aufgaben 1* oder *Aufgaben 2* ausgewählt werden. Diese unterscheiden sich in der Bereitstellung digitaler Hilfsmittel und in ihrer Komplexität. Die Erarbeitung der bedingten Wahrscheinlichkeit kann durch andere Kapitel, z.B. *Vierfeldertafel*, *Stochastische Unabhängigkeit*, *Komplexe Aufgaben* und *Zusammenfassung* (Net-Code: aab), ergänzt werden. Besonders hingewiesen sei auf das Kapitel *Vierfeldertafel* und den dortigen *Lehrtext*, da hier die Umformung von der Vierfeldertafel in ein Baumdiagramm animiert dargestellt wird (Net-Code: aaba).

Digitale Feedbackfunktionen und Werkzeuge

Eine interaktive Vierfeldertafel bzw. ein interaktives Baumdiagramm stellt jeweils ein zentrales Element der beiden Aufgaben dar (Abb. 5). Die Lernenden können ihre eingetragenen Werte prüfen oder sich bei der Vierfeldertafel direkt die Lösung anzeigen lassen. Solche Prüf- und Lösungsoptionen sowie vorgegebene Strukturen finden sich oftmals in

den Erforschen-Aufträgen und Einstiegsaufgaben der Kapitel. Sobald die Lernenden einen ersten Zugang zum Thema und erste Kompetenzen in der jeweiligen Thematik aufgebaut haben, können auch Aufgaben ohne entsprechende Hilfen oder Feedbackoptionen ausgewählt werden.

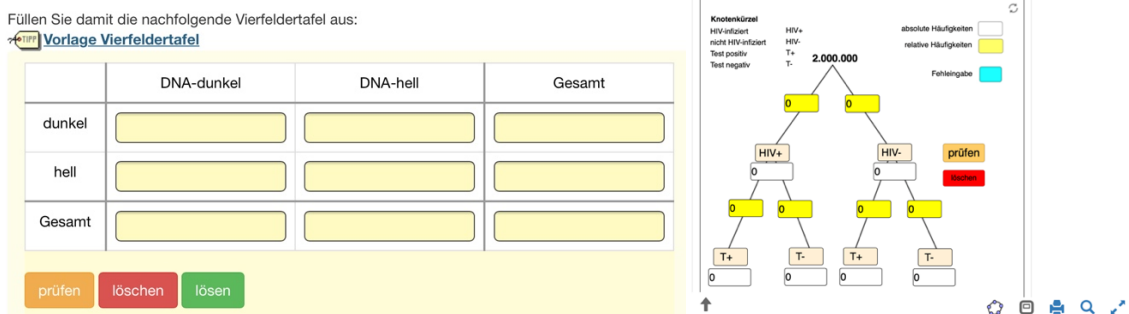


Abb. 5. Interaktive Vorlagen für eine Vierfeldertafel und ein Baumdiagramm (Net-Codes: aabb_erforschen2; aabb_index)

Neben diesen aufgabenspezifischen Hilfsmitteln, die hier ausschnittsweise vorgestellt werden, können auch aufgabenunabhängige Werkzeuge genutzt werden. Ein Beispiel ist die GeoGebra-App in Abbildung 6.

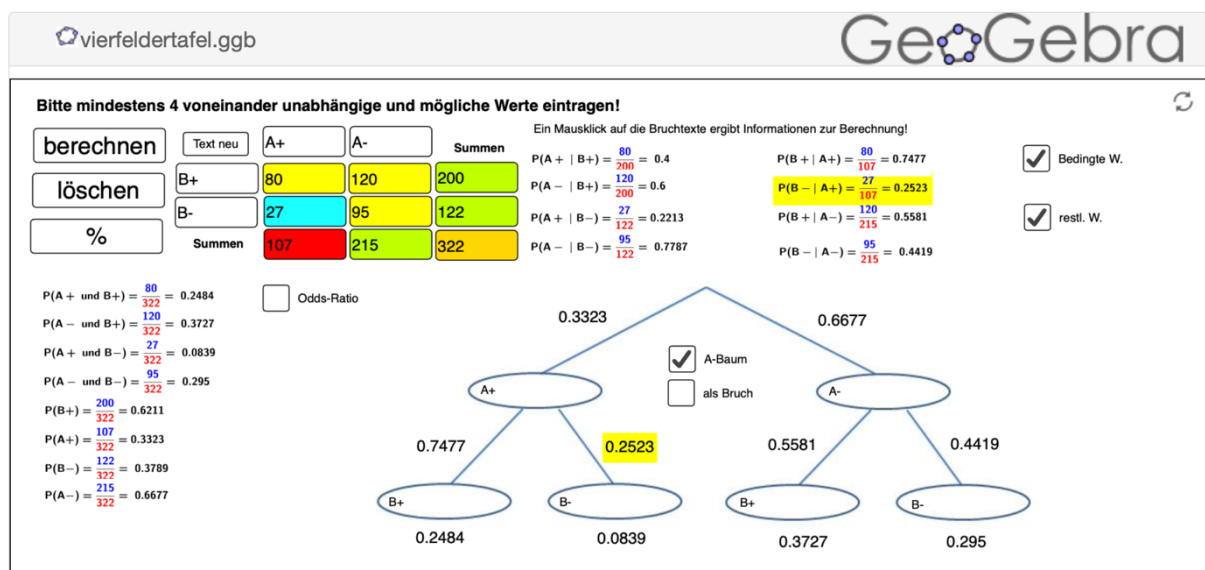


Abb. 6. GeoGebra-App zur Vierfeldertafel (Net-Code: q_vierfelder)

In dieser kann eine Vierfeldertafel eigenständig beschriftet und mit absoluten oder relativen Häufigkeiten ausgefüllt werden. Fehlende Werte und diverse Wahrscheinlichkeiten können direkt durch die App berechnet werden. Auf Basis der Vierfeldertafel lassen sich die jeweiligen Baumdiagramme generieren. Außerdem werden mit einem Klick auf eine Wahrscheinlichkeit die zugehörigen Daten bzw. Informationen markiert. Eine solche App kann direkt zu Beginn als umfangreiches Werkzeug, beispielsweise mit der „Morden im Norden“- Aufgabe, eingeführt werden, damit die Beziehungen und der Darstellungswechsel zwischen Vierfeldertafel, Baumdiagramm und einer Wahrscheinlichkeit veranschaulicht wird. Alternativ kann die App zu einem späteren Zeitpunkt den Lernenden präsentiert werden, wenn sie bereits in der Lage sind, selbstständig bedingte Wahrscheinlichkeiten zu berechnen und diese zielgerichtet für entsprechende Anwendungen genutzt werden kann.

5. Das Projekt KomNetMath

Das Projekt KomNetMath hat insbesondere das Ziel, einen Vergleich zwischen digitalem und analogem Schulbuch zu evaluieren, da es bislang noch keine gesicherten Ergebnisse gibt, inwiefern sich die jeweilige Nutzung unterscheidet bzw. welche unterschiedlichen Einflüsse dies auf etwaige Lerneffekte hat. Dies ist von besonderer Relevanz, da Mathematikschulbücher für die Unterrichtsorganisation eine übergeordnete Bedeutung haben (FAN, ZHU, & MIAO, 2013). Somit ergibt sich als übergeordnete Fragestellung des Projektes, wie sich Kompetenzen von Lernenden durch die Nutzung eines digitalen Mathematikschulbuchs im Vergleich zur Nutzung analoger Materialien entwickeln. Zur Beantwortung dieser Fragestellung wird der

Lernzuwachs von Schüler/inne/n vor und nach einer Unterrichtsreihe zum inhaltlichen Schwerpunkt „bedingte Wahrscheinlichkeiten“ gemessen (BRNIC, 2020). Die Kurse werden für den Zeitraum dieser Unterrichtsreihe, basierend auf den Ergebnissen eines Tests vor Beginn der Reihe, in zwei möglichst vergleichbare Gruppen aufgeteilt. Eine Gruppe arbeitet in dieser Unterrichtsreihe mit dem digitalen Schulbuch, die andere Gruppe erhält eine analoge Adaption der für diese Reihe relevanten Kapitel in Form eines gedruckten Hefters. Für diese analoge Adaption wurden gedruckte Analogien der Apps, Feedbackfunktionen und der weiteren interaktiven Elemente entwickelt. Die Adaption gewährleistet, dass nicht unterschiedliche Schulbücher miteinander verglichen werden, sondern Effekte auf den Vergleich zwischen analogen und digitalen Materialien rückführbar sind. Neben den vergleichbaren Materialien erhalten beide Gruppen ebenfalls gleichwertigen Unterricht.

Damit auch Einflüsse des langfristigen Einsatzes eines digitalen Schulbuchs untersucht werden können, werden darüber hinaus Einstellungen und spezifische Computer-Selbstwirksamkeitserwartungen der Lernenden zu dem digitalen Mathematikschulbuch im Verlauf eines Schuljahres erhoben, da sich Nutzung und Einstellungen bzw. Selbstwirksamkeitserwartungen gegenseitig beeinflussen können (BRNIC & GREEFRATH, 2020; KARSTEN, MITRA, & SCHMIDT, 2012). Mit Selbstwirksamkeitserwartung ist die Überzeugung einer Person gemeint, dass sie Handlungen, hier mit einem digitalen Schulbuch, erfolgreich ausführen kann.

Neben der Verwendung des digitalen Mathematikbuches im Unterricht und der empirischen Untersuchung ist die regelmäßige Fortbildung der unterrichtenden Lehrkräfte die dritte wichtige Säule des Projekts. In

diesem Rahmen kommen die Expert/innen für das digitale Schulbuch, die unterrichtenden Lehrkräfte und die begleitenden Fachdidaktiker/innen zusammen und treten gemeinsam in den Diskurs. In der Gestaltung der Fortbildungen wird ein Schwerpunkt auf die Verknüpfung unterrichtsrelevanter Inhalte aus dem Kernlehrplan und didaktischer Konzepte zum Einsatz des digitalen Mathematikschulbuchs einschließlich der Nutzung digitaler Werkzeuge gesetzt.

6. Erste Forschungsergebnisse

Im Rahmen des Projektes konnten bereits erste Erkenntnisse zur Nutzung des digitalen Schulbuchs und zu Auswirkungen auf das Lernen gesammelt werden. So konnte durch die Durchführung der Unterrichtsreihe mit dem Net-Mathebuch bereits ein signifikanter Kompetenzzuwachs der Schüler/innen festgestellt werden. Insbesondere im Vergleich zur Nutzung vergleichbarer analoger Materialien lassen sich positive Effekte durch die Aufbereitung des digitalen Schulbuchs feststellen, auch wenn die Schüler/innen von der jeweils gleichen Lehrkraft unterrichtet werden. Diese vorläufigen Ergebnisse sollen durch die Durchführung der Unterrichtsreihe mit weiteren Kursen bestätigt werden.

Es stellte sich außerdem heraus, dass positive Effekte auf spezifische Computer-Selbstwirksamkeitserwartungen und Einstellungen gegenüber einem digitalen Schulbuch erst durch eine langfristige Nutzung feststellbar sind. Dies kann mit einer Erwartungshaltung der Lernenden gegenüber einem digitalen Schulbuch zusammenhängen, die beispielsweise durch Erfahrungen mit anderen digitalen Medien geprägt ist. In vergleichbaren Studien zum Einsatz digitaler Werkzeuge zeigten sich ähnliche Effekte (GREEFRATH, 2012; RIEß, 2018). Es ist

anzunehmen, dass die Schüler/innen den Umgang mit einem digitalen Schulbuch erst erlernen müssen, damit sie die Potenziale und die bereitgestellten Werkzeuge für sich gewinnbringend einsetzen und erkennen. Diese Prämisse kann ebenso für die Lehrkräfte gestellt werden, sodass sie Potenziale eines digitalen Schulbuchs im Mathematikunterricht nutzen können. Hierfür stellt die Durchführung regelmäßiger Fortbildungen eine sinnvolle und begleitende Unterstützung dar.

In der Auswertung der Fragebögen konnte darüber hinaus festgestellt werden, dass die Schüler/innen insbesondere die Feedbackfunktionen und die Aufbereitung der Themen durch andere Visualisierungs- und Darstellungsmöglichkeiten als Vorteile des Net-Mathebuchs empfanden. Außerdem wurde die Zugänglichkeit des Net-Mathebuchs von jedem Endgerät positiv hervorgehoben.

Danksagung

Wir danken der Medienberatung Düsseldorf und dem Team des Net-Mathebuchs sowie den beteiligten Lehrkräften für die hervorragende Kooperation in diesem Projekt.

Literatur

BRNIC, M. (2020). Digital oder analog? Eine Interventionsstudie zur Schulbuchnutzung. In H.-S. Siller, W. Weigel, & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 177–180). Münster: WTM. <https://doi.org/10.17877/DE290R-21258>

BRNIC, M., & GREEFRATH, G. (2020). Learning mathematics with a digital textbook and its integrated digital tools: The KomNetMath project. *Proceedings of the 14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – ICTMT 14*. Gehalten auf der ICTMT 14, Essen,

Germany. <https://doi.org/10.17185/DUEPUBLICO/70736>

CHOPPIN, J., CARSONS, C., BORYS, Z., CEROSALETTI, C., & GILLIS, R. (2014). A Typology for Analyzing Digital Curricula in Mathematics Education. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 2(1). <https://doi.org/10.18404/ijemst.95334>

FAN, L., ZHU, Y., & MIAO, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM*, 45(5), 633–646. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x>

GREEFRATH, G. (2012). Überzeugungen und Erfahrungen von Lernenden im Unterricht mit digitalen Werkzeugen. In M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (Bd. 1, S. 309–312). Münster: WTM-Verlag. <https://doi.org/10.17877/DE290R-13816>

KARSTEN, R., MITRA, A., & SCHMIDT, D. (2012). Computer Self-Efficacy: A Meta-Analysis. *Journal of Organizational and End User Computing*, 24(4), 54–80. <https://doi.org/10.4018/joeuc.2012100104>

KMK (Hrsg.). (2016). *Bildung in der digitalen Welt. Strategie der Kultusministerkonferenz*. Berlin: KMK. Abgerufen von <https://www.kmk.org/aktuelles/artikelansicht/strategie-bildung-in-der-digitalen-welt.html>

KRÜGER, K., SILL, H.-D., & SIKORA, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43355-3>

REZAT, S. (2020). Mathematiklernen mit digitalen Schulbüchern im Spannungsfeld zwischen Individualisierung und Kooperation. In D. M. Meister & I. Mindt (Hrsg.), *Mobile Medien im Schulkontext* (S. 199–213). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-29039-9_10

RIEß, M. (2018). *Zum Einfluss digitaler Werkzeuge auf die Konstruktion mathematischen Wissens*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-20644-4>

MAXIM BRNIC, m.brnic@uni-muenster.de, ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster. Schwerpunkte seiner Arbeit sind das Lernen mit digitalen Schulbüchern und der Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht.

PROF. DR. GILBERT GREEFRATH, greefrath@uni-muenster.de, ist Professor für Mathematikdidaktik mit dem Schwerpunkt Sekundarstufen an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster. Schwerpunkte seiner Arbeit sind der Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge sowie mathematisches Modellieren.

Neu: der Vorkurs im Net-Mathebuch

Der alte Vertiefungskurs (in NRW ein 2-stündiges Zusatzangebot für Schüler-innen, die Sek.I-Stoff nachholen wollen) im Net-Mathebuch war im kostenfreien Bereich frei anwählbar. Das war ein Themengebiet mit sehr hohen Anwahlzahlen, u.a. genutzt für Schüler-innen der Klassen 10 zur Vorbereitung auf die Zentrale Abschlussprüfung. Deshalb haben wir – die Autor-innen – uns überlegt, auch diesen Bereich neu zu strukturieren und mit dynamischen Elementen eingängiger zu gestalten. In der alten Form waren es nur PDF-Dateien mit Einführungen/Aufgaben und Musterlösungen.

Das alte Vertiefungskursmaterial enthielt nicht nur Sek.I-Wiederholungsmaterial, sondern war auch kursbegleitend für den Analysis-Eingangunterricht geschrieben.

Die beiden Funktionen sind jetzt getrennt: im Vorkurs geht es um Wiederholung und Übung von Sek.I-Wissen. Das Analysis-nahe Material wurde in den fortlaufenden Analysiskurs der Einführungsphase integriert.

Zum Vorkurs

Er enthält zwei Mathematik-Kapitel.

1. Terme, Lineare Gleichungen und Funktionen:

- Terme vereinfachen, Lineare Gleichungen, Lineare Funktionen, Lineare Gleichungssysteme.

2. Weitere Gleichungen und Funktionen:

- Quadratische Gleichungen, Funktionsbegriff, Quadratische Gleichungen, Potenzen, Potenzfunktionen, Prozentrechnung – Wachstumsfaktor.

(Letzteres als Vorbereitung für die Exponentialfunktion, die im Unterricht der Einführungsphase eingeführt wird.)

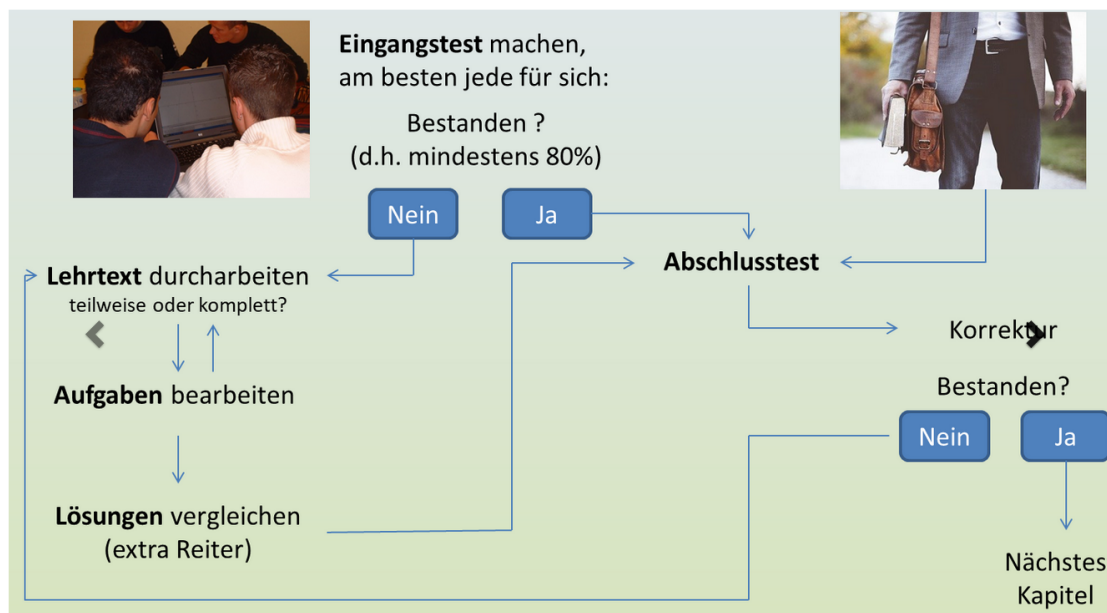
Es wird in einem Eingangskapitel ein Vorgehen vorgeschlagen, um eigenständiges Arbeiten von Schüler-innen zu fördern.

Das Selbstlernkonzept im Vorkurs

- Mit einem Eingangstest prüfen Schüler-innen, ob sie das Thema schon beherrschen oder ausführlich bearbeiten sollten.
- Sind mindestens 80 % der Eingangstest-Aufgaben richtig bearbeitet, kann ein-e Schüler-in direkt einen Abschlusstest von der Lehrperson bearbeiten. Diesen Abschlusstest sieht die Lehrperson durch und entscheidet über bestanden oder nicht bestanden.
- Ist der Eingangstest nicht erfolgreich bearbeitet oder der Abschlusstest nicht bestanden, wird das Material bearbeitet. Es enthält eine Einführung mit Beispielrechnungen, Aufgaben und in

einem Extraordner die Lösungen. Alles bearbeiten und kontrollieren (anhand der Lösungen) Schüler-innen nach eigenem Plan, möglichst in Kleingruppen.

- Sobald sich ein-e Schüler-in für fit in dem Thema hält, kann ein Abschlusstest von der Lehrperson geholt und durchgeführt werden.
- Hilfen – über die Erklärungen in dem Material, die Musterbeispiele und Aufgabenlösungen hinaus – erhalten Schüler-innen von anderen aus der zusammenarbeitenden Kleingruppe oder auf Nachfrage von der Lehrperson.

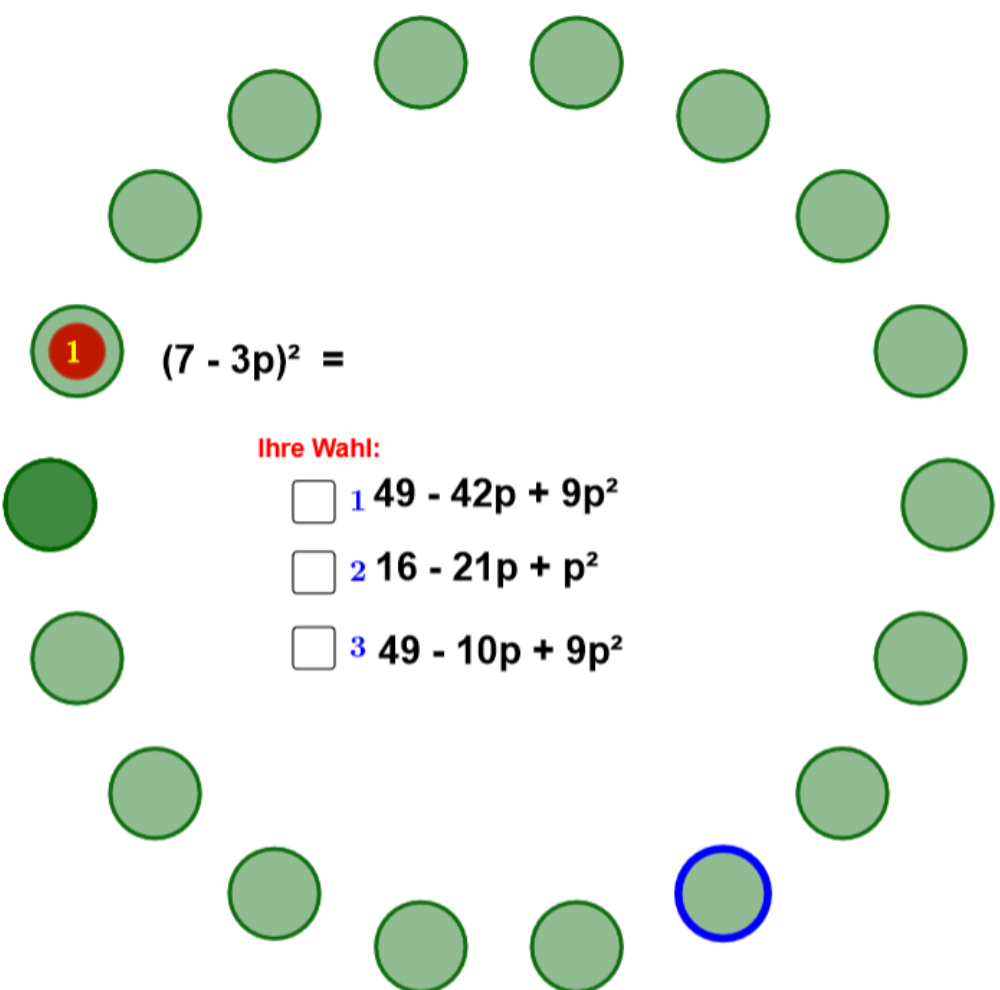


Der Eingangstest

- Im Eingangstest wird in jedem Teilkapitel per Zufallsauswahl eine aus 18 Testaufgaben ausgewählt. Unter drei möglichen Antworten wird eine ausgewählt und gespeichert, dann die nächste Aufgabe ausgewählt.

- Nach mindestens 8 bearbeiteten Aufgaben kann der bisherige Stand geprüft werden. Der Prozentsatz der richtig gelösten Aufgaben wird angezeigt. Für die falsch gelösten Aufgaben kann die richtige Lösung eingesehen werden.
- Sobald die Prüfung angeklickt wurde, kann der Test nicht weitergeführt werden, sondern muss neu gestartet werden.
- Die Schüler-innen entscheiden selbst, ob sie sich an die 80 %-Vorgabe für den Fortgang halten. Die Einhaltung der Vorgabe wird aber empfohlen.

Neustart



1 $(7 - 3p)^2 =$

Ihre Wahl:

1 $49 - 42p + 9p^2$

2 $16 - 21p + p^2$

3 $49 - 10p + 9p^2$

Zum neuen Analysis-Material in der Einführungsphase

Das Unterkapitel ‚Steigung‘ startet jetzt mit ‚Steigung in der Alltagssprache‘. Im Teil ‚**Steigungsverhalten von Funktionsgraphen**‘ lautet z.B. die Aufgabe 2 (hier mit Lösung):

Aufgabe 2 - Klassifizierung von Steigen/Fallen

Notieren Sie alle Steigungseigenschaften der nachfolgenden Liste a) bis o), die auf die nachfolgenden Graphen zutreffen (keine Teilausschnitte).

Die Funktion ist

- a. ist steigend,
- b. ist fallend,
- c. ist konstant,
- d. steigt linear,
- e. fällt linear,
- f. steigt immer stärker,
- g. steigt immer schwächer,
- h. fällt immer stärker,
- i. fällt immer schwächer,
- j. ist erst immer schwächer steigend, dann immer stärker fallend,
- k. ist erst immer stärker steigend, dann immer schwächer steigend,
- l. ist erst immer stärker fallend, dann immer schwächer fallend,
- m. ist erst immer schwächer fallend, dann immer stärker fallend,
- n. ist erst immer schwächer steigend, dann immer stärker steigend,
- o. ist erst immer schwächer fallend, dann immer stärker steigend.

	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d <input type="checkbox"/> e <input type="checkbox"/> f <input type="checkbox"/> g <input type="checkbox"/> h <input type="checkbox"/> i <input checked="" type="checkbox"/> j <input type="checkbox"/> k <input type="checkbox"/> l <input type="checkbox"/> m <input type="checkbox"/> n <input type="checkbox"/> o löschen prüfen		<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d <input type="checkbox"/> e <input checked="" type="checkbox"/> f <input type="checkbox"/> g <input type="checkbox"/> h <input type="checkbox"/> i <input type="checkbox"/> j <input type="checkbox"/> k <input type="checkbox"/> l <input type="checkbox"/> m <input type="checkbox"/> n <input type="checkbox"/> o löschen prüfen
	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d <input type="checkbox"/> e <input type="checkbox"/> f <input type="checkbox"/> g <input type="checkbox"/> h <input type="checkbox"/> i <input type="checkbox"/> j <input checked="" type="checkbox"/> k <input type="checkbox"/> l <input type="checkbox"/> m <input type="checkbox"/> n <input type="checkbox"/> o löschen prüfen		<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d <input checked="" type="checkbox"/> e <input type="checkbox"/> f <input type="checkbox"/> g <input type="checkbox"/> h <input type="checkbox"/> i <input type="checkbox"/> j <input type="checkbox"/> k <input type="checkbox"/> l <input type="checkbox"/> m <input type="checkbox"/> n <input type="checkbox"/> o löschen prüfen
	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d <input type="checkbox"/> e <input type="checkbox"/> f <input type="checkbox"/> g <input type="checkbox"/> h <input type="checkbox"/> i <input type="checkbox"/> j <input type="checkbox"/> k <input type="checkbox"/> l <input type="checkbox"/> m <input checked="" type="checkbox"/> n <input type="checkbox"/> o löschen prüfen		<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d <input type="checkbox"/> e <input type="checkbox"/> f <input type="checkbox"/> g <input checked="" type="checkbox"/> h <input type="checkbox"/> i <input type="checkbox"/> j <input type="checkbox"/> k <input type="checkbox"/> l <input type="checkbox"/> m <input type="checkbox"/> n <input type="checkbox"/> o löschen prüfen

Eine Aufgabe aus der ‚**Alltagssprache**‘ z.B. lautet (hier aus der Lösung):

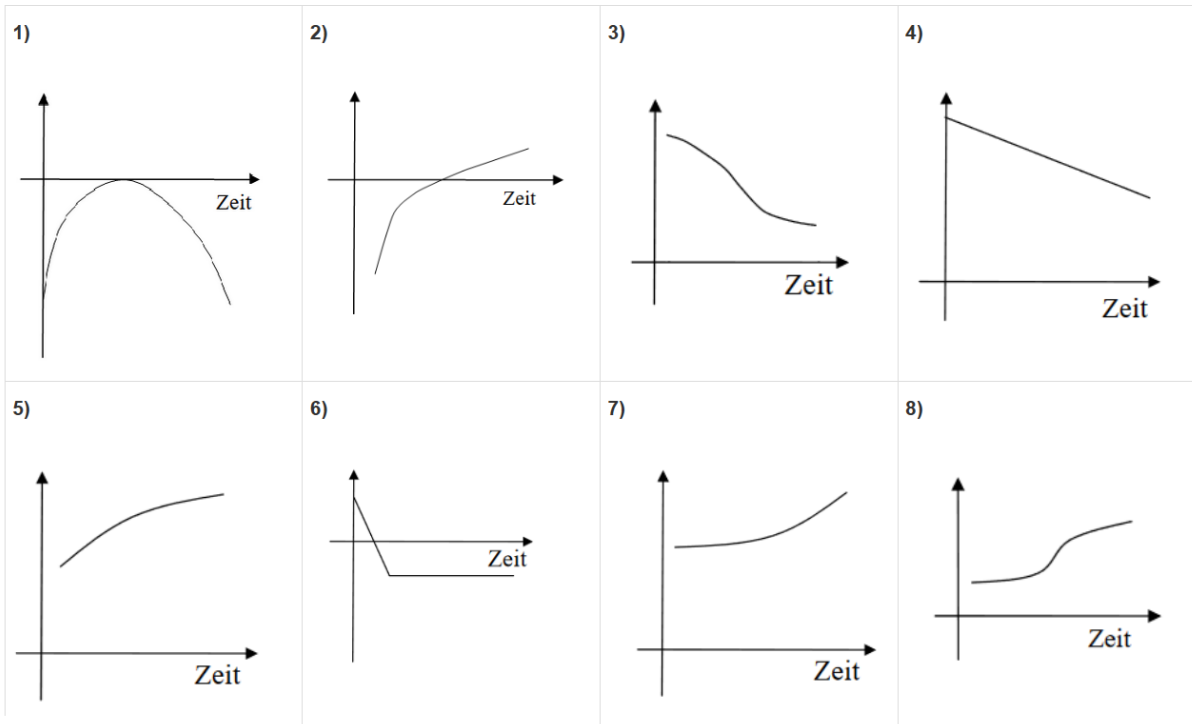
Aufgabe 7 - Alltagssprache und Graphen zuordnen

Nachfolgend finden Sie eine Liste mit Beschreibungen von Steigungsverhalten (a bis f) sowie eine Liste von Graphen (1 bis 8).

Liste von Steigungsverhalten:

a) immer schwächer steigend, dann linear steigend	b) zunächst linear fallend, dann konstant	c) zunächst immer schwächer steigend, dann immer stärker fallend	d) zunächst immer schwächer steigend, dann immer stärker steigend	e) zunächst immer stärker fallend, dann immer schwächer fallend	f) linear fallend
---	---	---	--	--	-----------------------------

Liste von Graphen:



Tragen Sie in nachfolgender Tabelle zu jeder Aussage den Buchstaben des passenden Steigungsverhaltens und die Nummer des passenden Graphen ein.

Aussage	Steigungsverhalten	Nummer des Graphen
Die Bevölkerung schrumpft gleichmäßig	f	4
Die Temperatur ist jetzt stabil, vorher fiel sie gleichmäßig ab.	b	6
Das zunächst immer dramatischere Abstürzen der Börsenkurse konnte gegen Ende des Börsentages wieder verlangsamt werden bis zu einer annähernden Stabilisierung.	e	3
Das Wetter wird im Winter etwas milder und die Minustemperatur steigt deutlich, nähert sich dann aber nur langsam der Null. Mit einer neuen Kältefront fällt die Temperatur vom Gefrierpunkt wieder immer schneller.	c	1
Die Stadt konnte ihre Schulden (negatives Guthaben) durch Zuzug neuer Firmen abbauen, wenn der anfangs rasante Abbau sich mit der Zeit auch etwas verlangsamte. Als die Positivzone erreicht war, konnte sie ihr Guthaben sogar kontinuierlich weiter steigern.	a	2

prüfen löschen

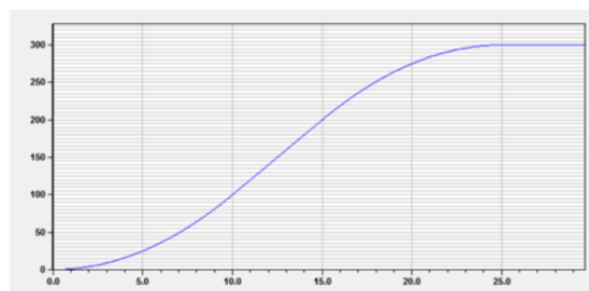
Unter dem Kapitel ‚**Ableitungsfunktion – graphisch**‘ sind neue Anwendungen aus dem alten Vertiefungskursmaterial integriert: Aufgaben zur Geschwindigkeit; zu Höhenprofilen; zum Benzinverbrauch; zum Steuertarif.

Hier ein Beispiel aus den **Geschwindigkeitsaufgaben** und die Lösung:

 Aufgabe W2

Rechts ist die Fahrt eines PKW dargestellt: auf der x-Achse die Zeit in Sekunden, auf der y-Achse die zurückgelegte Strecke in Metern.

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit für $t = 5\text{ s}$ und geben Sie sie in der Einheit km/h an.
- Im Verlauf der Fahrt ist die Geschwindigkeit einige Zeit konstant. Woran erkennen Sie das? Wie schnell ist der PKW da?
- Erläutern Sie, was bei $t = 25\text{ s}$ passiert.
- Wie schnell ist der PKW im Durchschnitt bis $t = 25\text{ s}$ (in km/h)?
- Bleibt der Fahrer unter der Innerorts-Geschwindigkeitsgrenze von 50 km/h ?



Lösung:

a.

Die Tangente im Punkt (5/25) geht auch durch (15/125), also

$$v = \frac{(125 - 25)m}{(15 - 5)s} = 10 \frac{m}{s} = 36 \frac{km}{h}. \text{ Der PKW fährt nach 5 Sekunden mit 36 km/h.}$$

b.

Zwischen $t = 10$ s und $t = 15$ s ist die Geschwindigkeit konstant, denn die Kurve verläuft dort linear. Dieses Geradenstück geht durch (10/100) und (15/200) mit der Steigung

$$\text{(Geschwindigkeit) } v = \frac{(200 - 100)m}{(15 - 10)s} = 20 \frac{m}{s} = 72 \frac{km}{h}.$$

c.

Ab $t = 25$ s steht der PKW. Die Steigung der Kurve und damit die Geschwindigkeit betragen 0 km/h.

d.

$$\text{Im Durchschnitt fährt der PKW } \frac{(300 - 0)m}{(25 - 0)s} = 12 \frac{m}{s} = 43,2 \frac{km}{h}.$$

e.

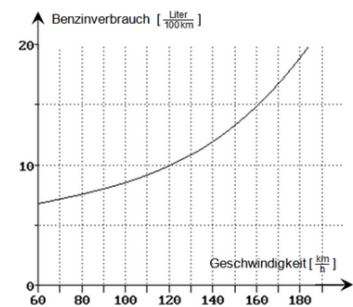
Nein, denn die Fahrt mit der konstanten Geschwindigkeit liegt mit 72 km/h deutlich über der erlaubten Höchstgeschwindigkeit von 50 km/h.

Eine Aufgabe zum Benzinverbrauch mit Lösung:

* Aufgabe W10

Rechts sehen Sie die grafische Darstellung des Benzinverbrauchs als Funktion der Geschwindigkeit im 4. Gang.

- Beschreiben Sie die Ausgangsfunktion im Sachzusammenhang in einigen Sätzen.
- Kommentieren Sie: "Wenn ich 180 statt 90 Sachen fahre, brauche ist nur halb so lange und verbrauche deshalb auch weniger." Bestimmen Sie dazu den Zeitbedarf und den Verbrauch für eine Strecke von 180 km bei einer Geschwindigkeit von 90, 120 und 180 km/h.
- Skizzieren Sie zu dem Graphen die lokale Änderungsfunktion und beschreiben Sie diese im Sachzusammenhang. Welche Einheiten sind auf den Achsen zu wählen?
- Notieren Sie eine Empfehlung für Fahrer/innen, die Kraftstoff sparend fahren wollen.
- Kommentieren Sie die Sparempfehlung: "Den letzten cm des Gaspedals nicht durchtreten".



Quelle: Bundesministerium für Wirtschaft: Mehr Kilometer mit weniger Benzin.

Lösungen

a.

Der Verbrauch nimmt immer stärker zu von etwa 7 Liter/100 km bei 60 km/h auf knapp 19 Liter/100 km bei 180 km/h.

b.

Für 180 km braucht der Fahrer, der 180 km/h fährt, $1,8 \cdot 19 \text{ Liter} = 34,2 \text{ Liter}$ und eine Stunde Fahrzeit.

Für 180 km braucht der Fahrer, der 90 km/h fährt, $1,8 \cdot 8 \text{ Liter} = 14,4 \text{ Liter}$ und zwei Stunden Fahrzeit.

Für 180 km braucht der Fahrer, der 120 km/h fährt, $1,8 \cdot 10 \text{ Liter} = 18 \text{ Liter}$ und 1,5 Stunden Fahrzeit.

Je schneller jemand fährt, desto schneller ist er am Ziel, desto mehr verbraucht er aber auch für die Strecke.

c.

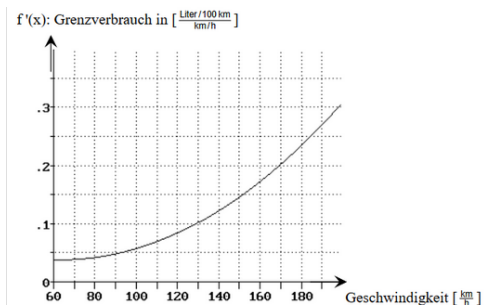
Erhöht man im 4. Gang bei 60 km/h die Geschwindigkeit etwas, so nimmt der Verbrauch (auf 100 km) nur wenig zu: Die Tangente im Punkt (60/6,7) verläuft auch durch (70/7,1) - dies ergibt eine Steigung von $\frac{7,1 - 6,7}{70 - 60} = 0,04 \text{ Liter}/100 \text{ km}$, wenn man die Geschwindigkeit um 1 km/h erhöht.

Liegt man mit der Geschwindigkeit höher, so erfordert eine Geschwindigkeitszunahme sofort eine größere Kraftstoffhöhung – bei 100 km/h erhöht sich der Verbrauch um rund 0,06 Liter/100 km, wenn man sich 1 km/h schneller fährt. Begründung: Die Tangente im Punkt (100/8,5) läuft etwa auch durch (110/9,1) - dies ergibt eine Tangentensteigung von $\frac{9,1 - 8,5}{110 - 100} = 0,06$.

Bei 180 km/h wird eine Geschwindigkeitserhöhung deutlich teurer. Sie kostet 0,24 Liter/100 km bei einer Geschwindigkeitserhöhung um 1 km/h. Begründung: Die Tangente im Punkt (180/18,9) läuft etwa auch durch (170/16,5) - dies ergibt eine Tangentensteigung von $\frac{18,9 - 16,5}{180 - 170} = 0,24$.

Nebenstehenden Graph erhält man durch geschickte Verbindung der drei Punkte (60/0,04), (100/0,06) und (180/0,24).

Einheiten: siehe Grafik rechts.



d.

Fahre (in jedem Gang) nicht bis an die Drehzahlgrenze. Bei hoher Geschwindigkeit bedeutet eine weitere Geschwindigkeitserhöhung eine kräftige Verbrauchserhöhung.

e.

Der letzte Zentimeter des Gaspedals ist immer der teuerste – ökologisch und ökonomisch. Deshalb ist die Sparempfehlung richtig.

Links zu diesem Rundbrief:

	Link	QR-Code	Net-Code
Titelblatt	https://m2.net-schulbuch.de/index.php?t=@@&s=dca_index		dca
Bedingte Wahrscheinlichkeiten	https://m2.net-schulbuch.de/index.php?t=@@&r=XX&d=screen&s=aabb_index		aabb
Steigung in der Alltagssprache	https://m2.net-schulbuch.de/index.php?t=@@&s=ahb_index		ahbg
Ableitungsfunktionen graphisch	https://m2.net-schulbuch.de/index.php?t=@@&s=ahb_index		ahbd _aufgaben2

Das Net-Mathebuch ist unter folgendem Link erreichbar:

<https://m2.net-schulbuch.de/>