Rundbrief **206**

2 / 2018

Mathematatik hat viele Gesichter

… angewandt, „abgewandt“ – und zugewandt !

Inhaltsverzeichnis

… und wie wär's mit
8, 7, 6, …, 2, 1, 0 ?

Impressum

Der MUED-Rundbrief erscheint vier Mal im Jahr in Appelhülsen mit einer Auflage von 800 Exemplaren.

MUED e.V., Bahnhofstr.72, 48301 Appelhülsen

Tel. 02509 / 606, Fax 02509 / 996516

E-Mail: mued.ev@mued.de, **http://www.mued.de**

Redaktion dieses Rundbriefs: Wilfried Herget

Redaktion des nächsten Rundbriefs: Antonius Warmeling – „Nachhaltigkeit“

Mathematik hat viele Gesichter …

Wilfried Herget

> Die Mathematik hat viele „Gesichter“, und es lohnt sich sehr, diese recht unterschiedlichen Seiten der Mathematik auch im Unterricht zu zeigen.

Jeder übliche Würfel hat sechs Seiten. Wer sie alle sehen will, wird ihn in der Hand drehen oder geschickt einen Spiegel verwenden (Herget 2012).

Auch *Funktionen haben viele Gesichter* – diese Metapher geht zurück auf Herget/Malitte/Richter (2000a): Wer eine mathematische Funktion von allen Seiten betrachten will, wird wohl an dem *Graphen*, an der *Wertetabelle* und an der *Funktionsvorschrift* (wenn es sie denn gibt) interessiert sein – und wenn es ums Modellieren mit Funktionen geht, spielt auch noch die zu beschreibende *Situation* eine Rolle. **Abb. 1** veranschaulicht diese vier „Gesichter“.

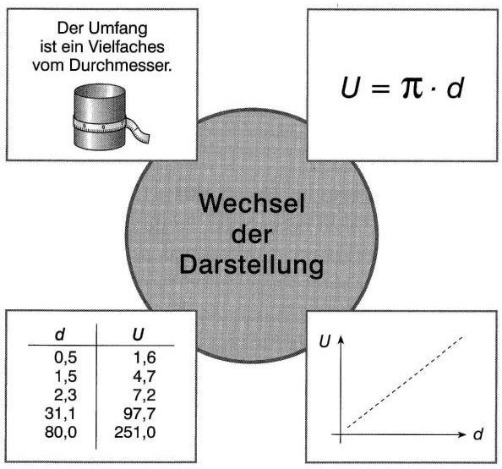


Abb. 1: Die vier „Gesichter“ einer Funktion (Barzel/Herget 2006, S. 7)

Doch auch die Mathematik selbst hat viele „Gesichter“, und es lohnt sich sehr, diese auch im Unterricht zu zeigen:

- *… **angewandt:*** Mathematik lernen – wozu soll das gut sein? Eine Antwort darauf ist ein anwendungs- und realitätsorientierter Mathematikunterricht. Er zeigt: Mathematik ist nützlich. Manchmal.
- *… **abgewandt:*** Doch Mathematik kann auch einfach nur „schön“ sein. Für nichts gut. Einfach nur schön. In einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht gehört auch diese Seite.
- … und etwas Drittes, nämlich ***zugewandt:*** Um den Schülerinnen und Schülern „meine“ Mathematik näherbringen zu können, muss ich mich ihnen zuwenden – ehrlich, transparent, klar, verlässlich, glaubwürdig.

Wilfried Herget, promoviert als Mathematiker, als Lehrer am Gymnasium zur MUED gestoßen, Mathematikdidaktiker in Clausthal, Duisburg, Hildesheim, Bielefeld, Halle-Wittenberg, seit 1995 Mit-Herausgeber „mathematik lehren“ und Autor der Rubrik „Die etwas andere Aufgabe“, längst in einem Senioren-Wohnprojekt im „Ruhestand“ – und noch immer sehr gern unterwegs auf Lehrerfortbildungen.

… angewandt …

Anwendungs-, Kontext-, Realitätsorientierung – diese „Seite“ der Mathematik spielt in der MUED von Beginn an eine wesentliche Rolle, aber auch in den drei Grunderfahrungen nach Heinrich Winter (**Kasten**).

Mathematische Allgemeinbildung (Heinrich Winter 1995)

Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:

1. Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen
2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art zu lernen und zu begreifen
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben.

Mathematik ist nützlich, klar. – Wirklich? Wirklich immer? Was kann man getrost der Mathematik anvertrauen – und was eher nicht? Neben der Vermittlung inhaltlicher Konzepte und Verfahren soll die Mathematik auch als ein Schlüssel zum Verständnis relevanter Aspekte unserer Lebenswelt erfahren werden (Herget/Maaß 2016a).

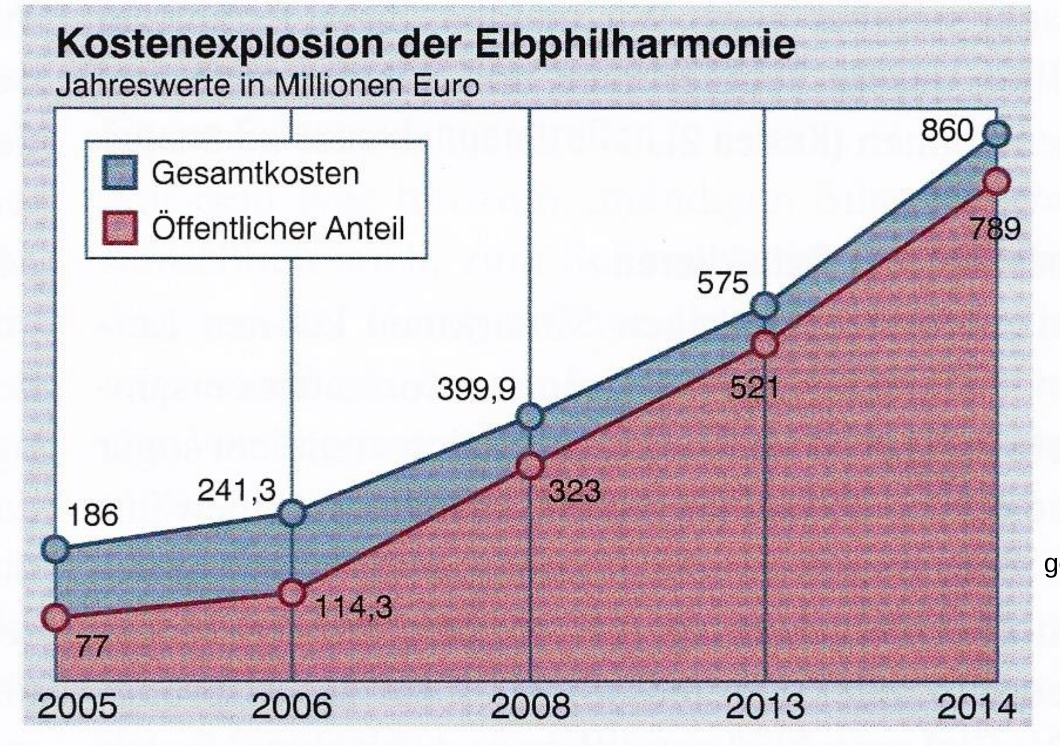
Allerdings sollten dabei die Schülerinnen und Schüler nicht nur erleben, *wo* und *wie* Mathematik genutzt wird und genutzt werden kann, sondern genauer hinschauen: *Wo und wie gehen dabei die subjektiven Sichtweisen und Ziele derjenigen ein, die die Mathematik nutzen?*

Beim Modellieren sind deshalb beachtenswert (Herget/Maaß 2016b, S. 3 f.):

- der *Beginn der Modellierung*, also die Themenwahl und die (interessengeleitete!) Entscheidung über die zu erreichenden Ziele:
  Was wird mit welcher Absicht modelliert? Welche Aspekte der Realität werden im Modell in welcher Weise berücksichtigt?
- die *Rückinterpretation* der Ergebnisse: Beim Modellieren geht es in der Regel nicht einfach um „richtig“ oder „falsch“, sondern um *angemessen*, *passend*, *hinreichend überzeugend* und *genau genug* (eher bekannt aus dem Alltag und anderen Unterrichtsfächern)
- und schließlich die *Verantwortung* für die Anwendung der Resultate in der Realität.

„Elphi“ – die Elbphilharmonie in Hamburg

Was lässt sich alles aus dieser Zeitungs-Grafik herauslesen?



gezeichnet nach: Hannoversche Allgemeine Zeitung, 16.6.2015

- Vergleiche die Anstiege: In welchem Zeitraum sind die Kosten am stärksten angestiegen? Wie groß war jeweils der Anstieg pro Jahr?
- Wieso hat die Zeitung wohl diese Einteilung (Skalierung) der Jahres-Achse gewählt? Schlage eine bessere Skalierung vor!
- Die Datenpunkte sind durch Strecken miteinander verbunden. Ist das sinnvoll? Welche Vorteile hat das? Welche Nachteile?
- Wie hat sich der nicht-öffentliche Anteil entwickelt?
- Wie könnten sich die Kosten nach 2014 weiter entwickelt haben?

(Herget/Maaß 2016b, S. 3)

Die obige **Elbphilharmonie-Aufgabe** ist ein Beispiel dafür, auf was es beim Modellieren *auch* ankommt, jenseits des Rechnens, nämlich im Wechselspiel zwischen *Realität* und *Mathematik:*
Die Kosten (die echten stehen in den Bilanzen, die prognostizierten sind modelliert) sind auf der Ebene der „Realität“; die Darstellung in einem Diagramm ist „auf der Seite der Mathematik“ – wobei die gedruckte Darstellung in der Zeitung wiederum „Realität“ schafft … auch Redakteure haben „Verantwortung für die Anwendung der Resultate“.

… „angewandt“ – sogenannt …

Der Spielzeug-Puppenwagen im Leistungskursabitur …

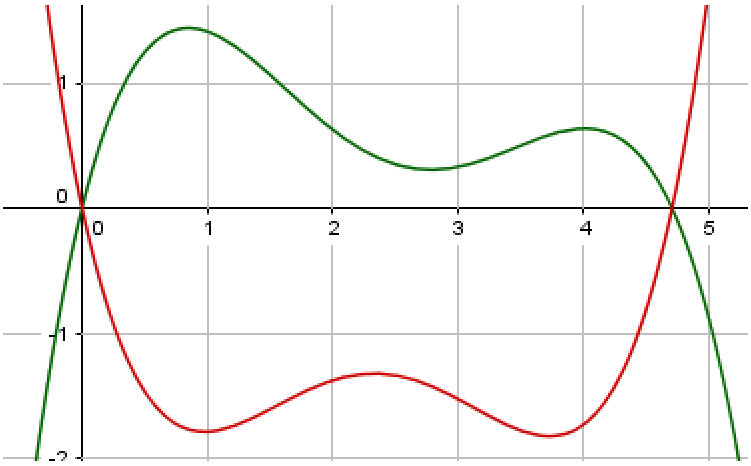
Eine Spielzeugfabrik stellt Puppenwagen her. Die beiden zueinander kongruenten Seitenteile eines solchen Puppenwagens bestehen aus Holzplatten. Die Außenfläche eines dieser Seitenteile kann in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung O (1 Längeneinheit entspricht 1 Dezimeter) dargestellt werden (siehe Abbildung). Die obere Begrenzungslinie der Außenfläche zwischen den Punkten O und $A(x_A/0)$ kann durch den Graphen der Funktion f und die untere Begrenzungslinie zwischen den Punkten O und $A(x_A/0)$ durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden. Die Funktionen f und g sind gegeben durch die Gleichungen

$f(x) = -0{,}106x^4 + 1{,}082x^3 - 3{,}602x^2 + 4{,}039x$ $(x \in \mathbb{R},\ 0 \le x \le x_A)$ und

$g(x) = 0{,}135x^4 - 1{,}269x^3 + 3{,}962x^2 - 4{,}618x$ $(x \in \mathbb{R}, 0 \le x \le x_A)$.

1.1. Begründen Sie, dass die Strecke OA näherungsweise die Länge 4,71 dm besitzt. Jedes Seitenteil des Puppenwagens wird aus einer rechteckigen Holzplatte ausgesägt. Die Strecke OA verläuft dabei parallel zu zwei gegenüberliegenden Seiten dieser Rechtecksfläche. Ermitteln Sie Mindestlänge und Mindestbreite der rechteckigen Holzplatte.

1.2. Jedes 0,5 cm dicke Seitenteil des Puppenwagens soll vollständig (Außenfläche, Innenfläche und Randfläche) mit einem für Kleinkinder gefahrlosen Speziallack überzogen werden. Ermitteln Sie den Inhalt der zu lackierenden Fläche eines Seitenteils des Puppenwagens.



(Skizze nicht maßstäblich)

Aufgaben für Abschlussklausuren zu entwickeln, das ist in der Tat eine sehr anspruchsvolle Aufgabe (und selten eine dankbare). Ich habe großen Respekt vor den Kolleginnen und Kollegen, die diese Herausforderung angehen. Keine Frage, Mathematik kann nützlich sein. Doch warum solche Verkleidungen?

Die „Kurvendiskussion“ kunstvoll-künstlich zu verkleiden, ist mittlerweile die Regel. Spätestens seit PISA. Noch ein Beispiel gefällig?

„Für die Versickerung von Niederschlag soll im Garten eine Mulde angelegt werden ...“ Der Querschnitt wird beschrieben mittels $f(x) = 1/64\ x^3 + 3/32\ x^2$, und es ist zu prüfen, ob die Mulde nicht zu steil ist. Und natürlich ist die Querschnittsfläche zu berechnen. Ferner gibt es das Brett mit $k(x) = -\ 9/64\ x$ (ja, genau dieses Brett …), und es ist zu zeigen, dass es die Mulde nur im Punkt A(–3 | 27/64) berührt (ja, eben genau dort …). Und zu guter Letzt ist da noch die Brücke mit $g(x) = -\ 1/32\ x^2 - 1$ … Der Text füllt eine ganze Seite, auf der zweiten Seite finden sich die Skizzen mit allen Bezeichnungen.

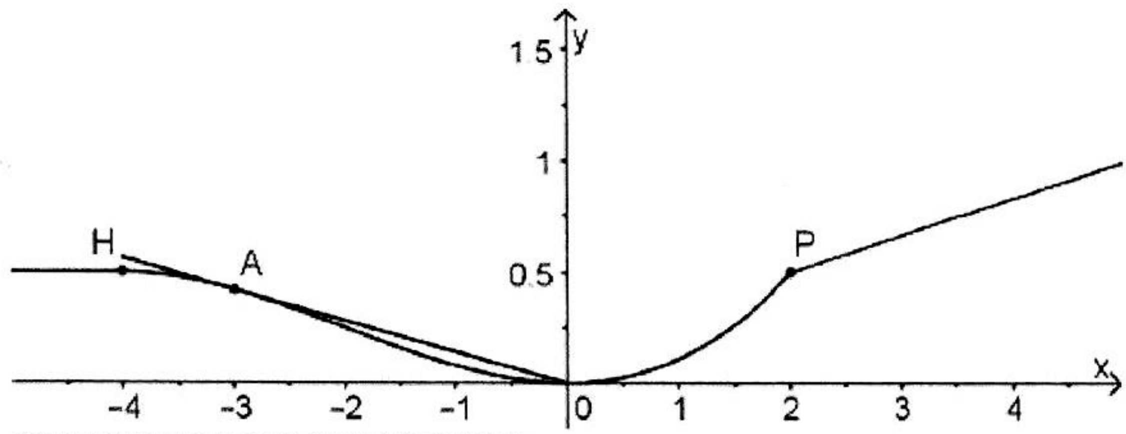


Abbildung 1: Querschnitt der Mulde mit Brett

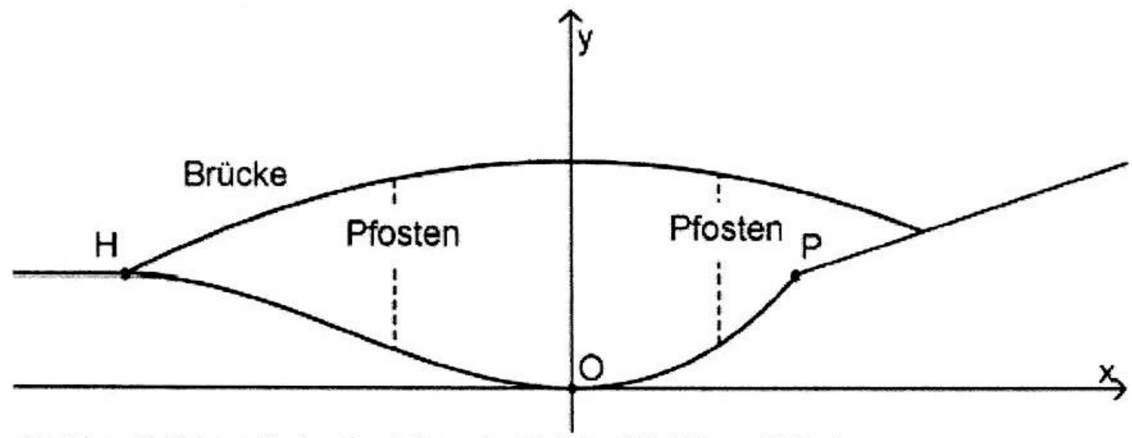


Abbildung 2: Schematische Darstellung der Mulde mit Brücke und Pfosten

Benötigt man die Kurvendiskussion, um eine Niederschlagversickerungsmulde im Garten zu planen und dann ein Brett an die Böschung anzulehnen?

Übrigens: Die Koeffizienten 1/64 usw. sind nur notwendig, damit der Graph der Polynomfunktion sich einigermaßen „Mulden-zahm“ verhält – sie bringen allerdings rein rechentechnische Hürden mit sich, selbst mit Taschenrechner. Ist das wirklich angebracht, in einer solch besonderen Prüfungssituation? Sollte es nicht vor allem um das *Verstehen* der Schul-Analysis gehen?

… „abgewandt“ angewandt …

> *„Lieber eine hübsche Denksport-, eine interessante historische, eine offensichtlich eingekleidete Aufgabe als eine ernst gemeinte Schein-anwendung.“* (Hans Schupp)

- Wie teuer wird‘s wohl übermorgen sein? Und überübermorgen? Und …?

Die Frage zu dieser charmanten Preistafel ist natürlich mit Augenzwinkern gestellt … schmunzelnd kann man sich auf die Suche nach einer mehr oder weniger sinnvollen Vorschrift machen. Und festhalten, dass es in solchen Fällen nie nur eine einzige Lösung geben kann (Herget/Maaß 2016a, S. 47; Foto: Melanie Herget)

Ähnlich ist es bei der Preisgestaltung zu Krapfen, siehe unten – hier aber drängen sich durchaus sehr reale Fragen auf (Foto: Bernd Effner):

- Wie viel kosten dann zwei Krapfen? Und wie viel kosten vier Krapfen? Und 6, 7, 8, 9, 10 Krapfen?

… einfach nur schön – „abgewandt“ …

„Mathematics – The Science of Patterns“ (Keith Devlin)
„Frisch gewagt ist halb gewonnen.“ – Dimidium facti, qui coepit habet.
(Horaz, 65 – 8 v.Chr., römischer Satiriker und Dichter)
„Großes entsteht immer im Kleinen.“ (Motto des Saarlandes)
„Mathematikunterricht kann schön sein, weil Mathematik schön ist.“
(Heitzer/Weigand 2015, S. 8)

2018 – die Zahl des Jahres

- Auf welche Ziffer endet 2018^{2018}?

Diese Potenz ist wahrlich nicht klein. Doch die letzte Ziffer bekommen wir tatsächlich „per Hand“: Einfach mal klein anfangen (Herget/Strick 2012, S. 24)!
$2018^1 = \ldots 8$
$2018^2 = 2018 \cdot 2018 = \ldots 8 \cdot \ldots 8 = \ldots 4$ (denn $8 \cdot 8 = 64$)
$2018^3 = 2018^2 \cdot 2018 = \ldots 4 \cdot \ldots 8 = \ldots 2$
$2018^4 = 2018^3 \cdot 2018 = \ldots 2 \cdot \ldots 8 = \ldots 6$
$2018^5 = 2018^4 \cdot 2018 = \ldots 6 \cdot \ldots 8 = \ldots 8$
Da schließt sich der Kreis: Die Endziffern wiederholen sich zyklisch im „Vierer-Takt“, also $2018^{2016} = \ldots 6$, $2018^{2017} = \ldots 8$ und $2018^{2018} = \ldots 4$. Fertig.

nach: www.zeit.de/wissen/2018-01/mersenne-primzahl-50-entdeckt-mathematik

Die größte bekannte Primzahl

Jonathan Pace aus Tennessee ist glücklich: Am 26. Dezember 2017 hat sein Rechner die bislang größte bekannte Primzahl errechnet. Ausgeschrieben hätte diese Zahl 23 249 425 Stellen; ausgedruckt würde sie 9 000 Seiten füllen.
Primzahlen sind Zahlen größer als Eins, die nur durch sich selbst und Eins teilbar sind. Schon in der Antike gab es Menschen, die von der Folge dieser Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, ... fasziniert waren: Vor fast 2 500 Jahren zeigte Euklid sehr elegant, dass die Folge der Primzahlen nie endet.
Im 16. Jahrhundert fiel dem Mönch Marin Mersenne eine besondere Art von Primzahlen auf: Primzahlen, die entstehen, indem man die Zahl 2 ein paarmal mit sich selbst multipliziert und dann 1 abzieht. 3 ist das kleinste Beispiel: 2 mal 2 minus 1. Die jetzt gefundene Mersenne-Primzahl ist die fünfzigste in dieser Reihe; sie entsteht, indem man die Zahl 2 insgesamt 77 232 917 Mal mit sich selbst multipliziert und dann 1 abzieht. Zur Zeit Mersennes waren gerade mal sieben Primzahlen dieser Form bekannt. Die größte davon war 524 287; sie entsteht, indem man die 2 insgesamt 19 Mal mit sich selbst multipliziert und dann 1 abzieht.

- Auf welche Ziffer endet die derzeit größte bekannte Primzahl?

… zugewandt …

Um all die „Gesichter“ der Mathematik ihnen näherbringen zu können, muss ich mich den Schülerinnen und Schülern zuwenden – ehrlich, transparent, klar, verlässlich, glaubwürdig.

Pädagogisches und fachliches Lernen sind nicht zu trennen – ab Seite 21 beschreibt Andrea Hoffkamp hier einige ihrer zentralen Erfahrungen an einer Berliner Gemeinschaftsschule im sozialen Brennpunkt. Dabei stellt Feedback durch vielerlei unterrichtspraktische Minimethoden eine ganz wesentliche Verbindung dar – um einerseits so den Schülerinnen und Schülern zu zeigen „Ich sehe dich“ und andererseits genügend Rückmeldung zu erhalten, um den Unterricht auf die Gruppe abzustimmen.

Partnerarbeit, Falten, Experimentieren, Reflektieren, … – aber auch ein Lehr-Vortrag und ein fragend-entwickelnder Unterricht, der nicht routinemäßig-automatisch abgespult wird, sondern zur rechten Zeit *bewusst* genutzt wird – sollten heute zum Repertoire gehören. Jedenfalls: mehr als zu meiner Zeit.

Und sehr gerne werbe ich für …

… Zeit nehmen, geben, lassen …

Zeit macht nur vor dem Teufel halt / heut‘ ist schon beinah‘ morgen – sang Barry Ryan 1971. Schon eine Weile her. Musik hält eben länger als Mathe ... und 45 Jahre später singt das österreichische Duo Seiler und Speer:

Bitte stoppt doch irgendwer die Zeit /
weu sunst geht ollas Schene schnö vuabei /
sowies grod is, so kunntats ewig bleim.

Kennen Sie das, am Ende einer Klausur, Klassenarbeit, Schularbeit? Wenn fast alle in der Klasse, die Köpfe tief gebeugt über den Heften, gerötet vor Anstrengung, schnell noch etwas zu Papier bringen wollen? *Schnö vuabei* geht die Zeit … auch wenn es für die Schülerinnen und Schüler bei der Mathearbeit selten um *ollas Schene* geht.

Was tun? Als Lehrer habe ich gelernt, weniger Aufgaben zu stellen. Von jedem Aufgabentyp so wenige, wie ich es verantworten konnte. Und ich freute mich, wenn am Ende der Arbeit fast alle (!) schon abgegeben hatten. Denn es geht mir nicht um „Schnell, schnell!“ – sondern um *ollas Schene:* ums Verstehen, Begreifen, ums sorgfältige Nachdenken und Bearbeiten. So viel Zeit darf sein.

nach: Die etwas andere Aufgabe – In: *mathematik lehren,* Heft 200, S. 48

Materialien für den Unterricht

- … alles von der MUED … – **www.mued.de** – ;-)
- … die Rubrik „Die etwas *andere* Aufgabe“ seit 1995 in der Zeitschrift *mathematik lehren* – **www.mathematik-lehren.de** –
- Büchter, Andreas; Herget, Wilfried; Leuders, Timo; Müller, Jan Hendrik (2007/2010): Die Fermi-Box. 5.–7. Klasse / 8.–10. Klasse. – Klett/vpm, Stuttgart.
- Herget, Wilfried; Scholz, Dietmar (1998): Die etwas andere Aufgabe – aus der Zeitung. – Kallmeyer, Seelze.
- Herget, Wilfried; Jahnke, Thomas; Kroll, Wolfgang (2001/2009): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I / Sekundarstufe II. – Cornelsen, Berlin.
- Herget, Wilfried; Strick, Heinz Klaus (2012): Die etwas andere Aufgabe 2 – Mathe mit Pfiff. – Friedrich Verlag, Seelze.

Literatur – Anregungen zum Weiterlesen …

Barzel, Bärbel; Herget, Wilfried (2006): Zahlen, Symbole, Variablen – abstrakt und konkret. – In: *mathematik lehren*, Heft 136, S. 4–9.

Büchter, Andreas (2009): Bewerten und Entscheiden – mit Mathematik. – In: *mathematik lehren*, Heft 153, S. 4–9.

Heitzer, Johanna; Weigand, Hans-Georg (Hrsg.) (2015): Mathematik – Schönheit erleben. – *mathematik lehren*, Heft 193 – Friedrich Verlag, Seelze.

Herget, Wilfried (Hrsg.) (2007): Der mathematische Blick. – *mathematik lehren*, Heft 145 – Friedrich Verlag, Seelze.

Herget, Wilfried (2012): Funktionen haben viele Gesichter. – In: Petzschler, Ines; Etzold, Heiko (Hrsg.) (2012): Funktionen haben viele Gesichter. – MUED-Rundbrief 185. – MUED.

Herget, Wilfried; Maaß, Jürgen (Hrsg.) (2016a): Nutzt Mathematik!?! – *mathematik lehren*, Heft 194 – Friedrich Verlag, Seelze.

Herget, Wilfried; Maaß, Jürgen (2016b): Mathematik nutzen – mit Verantwortung. – In: (Herget/Maaß 2016a).

Herget, Wilfried; Malitte, Elvira; Richter, Karin (2000a): Funktionen haben viele Gesichter – auch im Unterricht! – In: Flade, Lothar; Herget, Wilfried (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen nach TIMSS. – Volk und Wissen, Berlin, S. 115–124.

Maaß, Jürgen (2006): Modellierung im Mathematikunterricht. – WTM Verlag, Münster.

Malitte, Elvira; Richter, Karin; Herget, Wilfried; Sommer, Rolf (2007): Modellieren mit Gewinn. Mathe-Welt. Das Schülerarbeitsheft. – In: *mathematik lehren*, Heft 145, 24 S.

Winter, Heinrich (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. – In: Mitteilungen der GDM, Nr. 61, S. 37–46.

Petzschler, Ines; Schöneburg, Silvia; Krohn, Thomas; Wöller, Susanne (2016): Zeitung machen. MatheWelt. Das Schülerarbeitsheft. – In: (Herget/Maaß 2016a), 16 S.

Winter, Heinrich Winand (2016): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. – Springer, Heidelberg.

Winter, Heinrich; Haas, Nicola (1995): Verstehen als Modellbilden. Beispiele aus dem motorisierten Verkehr. – In: *mathematik lehren*, Heft 68, S. 47–53.

www.mathematik-lehren.de/blog/modellieren/post/mathe-und-der-rest-der-welt/

Appetizer für den Mathematikunterricht

Ines Petzschler, Silvia Schöneburg-Lehnert

Das Thema einer Stunde ist meist rasch gefunden. Ungleich schwerer fällt es, einen passenden, abwechslungsreichen und motivierenden Einstieg zu finden …

„Was haben wir letzte Stunde gemacht?“ „Wie sieht es mit den Hausaufgaben aus?“ … Typische Einstiege – aber wohl kaum geeignet, Interesse und Neugier zu wecken. Doch wie kann ich eine Stunde lebendig und abwechslungsreich beginnen?

Einstiege können durchaus methodenreich, vielfältig und inhaltlich variantenreich gestaltet werden. So z. B. mit kleinen Forschungsaufträgen, bei denen Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten zu entdecken sind. Und es gibt auch schöne Ideen, mit einer interessanten Übung oder Wiederholung zu starten, beispielsweise Tandembögen zu Termen, Ampelaufgaben zur Stochastik, Spiele zu Funktionen usw. (Petzschler/Schöneburg 2017).

Oder wie wär’s mal mit Belletristik? Ein kurzer Auszug aus Büchern wie „Der Zahlenteufel“ (Arithmetik) oder „Da Vinci Code“ (Goldener Schnitt) fesselt die Aufmerksamkeit. Auch ein passender „Mathesong“ auf *youtube* kann hier den Unterricht bereichern. So bietet das Video „Wie weit ist es bis zum Horizont?“ (https://www.youtube.com/watch?v=iK9bhyl6B_E) der Berliner Rock-Band *Knorkator* einmal eine etwas andere Auseinandersetzung mit dem Satz des Pythagoras und schickt die Schülerinnen und Schüler auf Fehlersuche (Petzschler/Schöneburg 2017, S. 105).

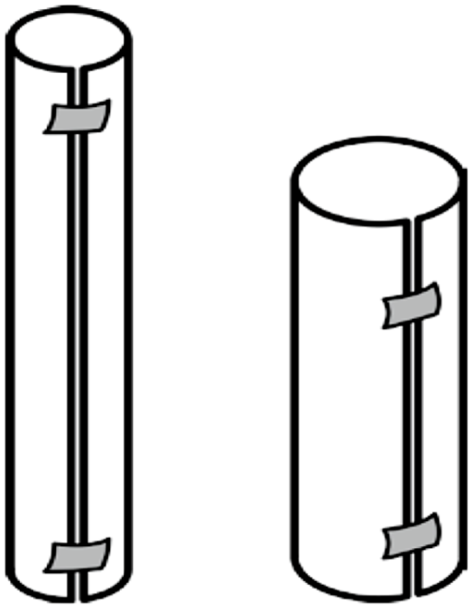
Literatur / zum Weiterlesen

Petzschler, Ines; Schöneburg, Silvia (2017): Appetizer Mathematik. Ideen und Materialien für themenorientierte Stundeneinstiege. – Verlag an der Ruhr, Mülheim an der Ruhr.

Ines Petzschler ist seit 38 Jahren Lehrerin am Gymnasium in Leipzig, Fachseminarleiterin, Schulbuchautorin, aktiv in der Lehreraus- und -fortbildung und bei der INSPIRATA in Leipzig und fährt immer mit dem Fahrrad zur Schule.

Silvia Schöneburg-Lehnert ist Lehrerin für Mathematik und Latein, seit 2012 Juniorprofessorin für Mathematikdidaktik an der Uni Leipzig und hat dort Deutschlands schönsten Seminarraum.

Appetizer 1: Wo passt mehr rein?



„Volumen von Körpern“ – als Einstieg eine Schätzaufgabe: Ich stelle – für alle gut sichtbar – zwei (Hohl-)Zylinder aus einem DIN-A4-Blatt her. Dabei bildet einmal die lange und einmal die kurze Seite den Umfang des Zylinders. So entstehen ein kurzer, breiter Zylinder und ein hoher, schmaler Zylinder.

- In welchen passt mehr hinein?
- Oder passt in beide gleich viel?

Mit einem kleinen, aber stets beeindruckenden Experiment wird die Schätzaufgabe beantwortet (vgl. Petzschler/ Schöneburg 2017, S. 39 f.):

1. Der hohe, schmale Zylinder wird auf den Teller gestellt und vollständig mit Popcorn gefüllt.
2. Der breite Zylinder wird über den hohen gestülpt und dieser vorsichtig entfernt. Das Popcorn verteilt sich im breiten Zylinder. Deutlich wird: Der breite Zylinder ist nicht vollständig gefüllt – er hat das größere Fassungsvermögen.

Es schließt sich die Definition des Begriffs *Volumen* als Größe des ausgefüllten Raumes an. Möglich wäre auch der Einsatz beim Thema „Zylinder-Volumen“ in Klasse 8/9.

Und wenn man weiß, dass beim DIN-A-Format die längere Seite genau $\sqrt{2}$-mal so lang ist wie die kürzere Seite, dann kann man schließlich auch *ausrechnen*, dass das Popcorn aus dem hohen Zylinder den breiten Zylinder genau bis zum $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$-Fachen der Höhe ausfüllt (vgl. auch Herget/Strick (2012): Die etwas andere Aufgabe 2 – Mathe mit Pfiff. Friedrich, S. 63, Aufgabe 11.2).

Bemerkung

Wir stellen fest, dass hier sowohl die Schülerinnen und Schüler als auch Erwachsene meist schätzen, dass beide Zylinder dasselbe Fassungsvermögen haben. Nach dem Experiment sind sie sehr verblüfft, dass es nicht so ist. Fragen wir nach, wird schnell ersichtlich, dass – naheliegenderweise – einfach vom jeweils gleichen (Ober-)Flächeninhalt des A4-Blattes ausgegangen und dies fälschlicherweise auf das Volumen übertragen wird.

Appetizer 2: Mandarinen fürs Finden der Flächen-Formel

Unvergesslich: ein Experiment, um die Formel für den Oberflächeninhalt der Kugel zu entdecken! Wir empfehlen Partnerarbeit – aber auch als Demonstration ist dieser Einstieg gut geeignet (Petzschler/Schöneburg 2017, S. 49 f.). Eine Alternative wäre ein Fußball(-Modell) aus Fünf- und Sechsecken.

Die Oberfläche einer Kugel

oder wie Mandarinen nützlich sind, um die Formel zu finden

Ihr braucht

A4-Blatt, Zirkel, Lineal, eine Mandarine

So geht´s

1. Bestimmt den Durchmesser und den Radius der Mandarine.

Durchmesser d = _____________ Radius r = _______________

2. Zeichnet auf das A4-Blatt sechs Kreise mit dem Radius r.

3. Schält die Mandarine vorsichtig. Füllt mit den Schalenstücken die gezeichneten Kreise möglichst lückenlos aus.

4. Notiert die Anzahl der vollständig ausgefüllten Kreise: _____________

Herleitung

5. Ergänzt den Lückentext.

Mit den Mandarinenschalen haben wir ________________ vollständig ausgelegt, d. h., der Oberflächeninhalt der Kugel ist genau so groß wie

der ________________________ von _____________________.

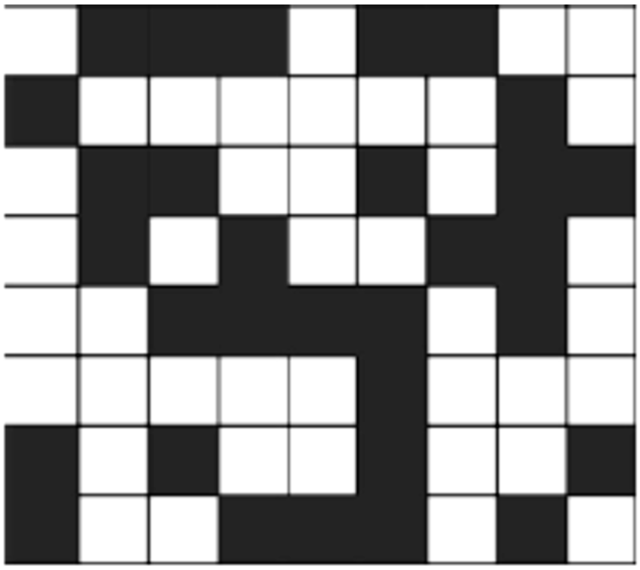
Die Fläche eines Kreises mit dem Radius r wird mit der Formel

___________________ berechnet.

➔ Für die Kugel gilt also: A_O =

6. Ermittelt nun die Oberfläche eurer Mandarine. Rundet das Ergebnis sinnvoll.

Appetizer 3: Zufallskunst



Die Schülerinnen und Schüler führen ein einfaches Zufallsexperiment durch. Dazu werfen sie eine Münze und veranschaulichen das jeweilige Ergebnis durch Einfärben (schwarz für Wappen) bzw. Nichteinfärben (weiß für Zahl) eines Kästchens (vgl. Petzschler/Schöneburg 2017, S. 74–76).

Dadurch erhält jede/jeder ein anderes schwarz-weißes Muster. Anschließend bestimmen sie je Zeile die Anzahlen der schwarzen und weißen Kästchen in ihrem Muster und finden z. B. die längste „Serie“ an weißen bzw. an schwarzen Kästchen.

Die Auswertung des Experiments kann im Unterrichtsgespräch erfolgen. *Wappen* oder *Zahl* – diese beiden Ergebnisse sind augenscheinlich „gleichberechtigt“, also erwarten wir ungefähr gleich viele weiße und schwarze Kästchen. Der Vergleich all der vielen verschiedenen Muster macht deutlich: Es ist nicht vorhersagbar, welches Ergebnis in welcher Reihenfolge auftritt – das ist eben Zufall. Besonders verblüffend sind die manchmal vorkommenden langen Serien an schwarzen oder weißen Kästchen, die tatsächlich in einzelnen Mustern auftreten. Ist das sehr verdächtig? Oder ist das tatsächlich „ganz normal“?

Im weiteren Verlauf können die Begriffe *absolute* und *relative Häufigkeit* eingeführt werden. Und auch einige der aufgeworfenen Fragen können nach und nach beantwortet werden.

Ist schwarz-weiß zu langweilig?

Bunte „Kunst“ entsteht, wenn das Zufallsmuster mit einem Würfel erzeugt und jeder Zahl eine Farbe zugeordnet wird. Um Muster und Gesetzmäßigkeiten erkennen zu können, sollte die Gesamtanzahl der Kästchen mindestens 100 betragen. Denkbar ist auch, von allen Schülerinnen und Schülern die (rechnerischen) Ergebnisse mit Hilfe digitaler Werkzeuge (z. B. GTR, Excel) zusammenzutragen und graphisch zu veranschaulichen. Dabei kann dann auch das „Empirische Gesetz der großen Zahlen“ thematisiert werden.

Egal ob schwarz-weiß oder bunt, die einzelnen Kunstwerke können schließlich zu einem großen vereint und im Mathe-Raum ausgestellt werden.

Mathematische Miniaturen

Heinz Klaus Strick

„Mathematische Miniaturen“ ist seit einiger Zeit eine Rubrik in der Zeitschrift *mathematik lehren* (www.mathematik-lehren.de).

Die Figuren des Arbeitsblatts auf der folgenden Seite belegen beispielhaft, wie man manche mathematische Formeln sogar mit einfachen Punktmustern begründen kann – die Beispiele hier sind aus (Strick 2017, Kap. 2), dort farbig.

Lösungshinweise zu diesem Arbeitsblatt

Im Folgenden wird die n-te Dreieckszahl mit Δ_n bezeichnet.

a. Das Quadrat enthält acht Dreiecke, jeweils Δ_5; außerdem in der Mitte einen Punkt. Das bedeutet $8 \cdot \Delta_5 + 1 = 2 \cdot 5 + 1$, entsprechend $8 \cdot \Delta_n + 1 = 2 \cdot n + 1$.
Also ist $\Delta_n = \frac{1}{8} \cdot \left((2n+1)^2 - 1\right) = \frac{1}{8} \cdot \left(4n^2 + 4n\right) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$.

b. Hier ist $\textit{dunkel} + \textit{hell} = \Delta_{10} + \Delta_9 = 10^2$ dargestellt, entsprechend allgemein:
Die n-te Dreieckszahl und die $(n–1)$-te Dreieckszahl ergänzen sich zu n^2.

c. Dieses Punktmuster stellt die Folge der Summe der ersten fünf (allgemein der ersten n) ungeraden natürlichen Zahlen dar.

d. Das Quadrat setzt sich aus vier zueinander kongruenten Dreiecken zusammen, die jeweils für die Summe der ersten fünf ungeraden natürlichen Zahlen stehen; entsprechend allgemein: $4 \cdot \left(1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)\right) = ((2n-1)+1)^2$, also
$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = \frac{1}{4} \cdot ((2n-1)+1)^2 = \frac{1}{4} \cdot (2n)^2 = n^2$

e. Das Rechteck besteht aus jeweils 1 + 3 + 5 + 7 + 9 roten und blauen Punkten, insgesamt $(9 + 1) \cdot 5 = 50$ Punkte. Allgemein, entsprechend:
$2 \cdot \left(1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)\right) = ((2n-1)+1) \cdot n = 2n \cdot n$,
d. h. $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$.

f. Jedes der drei „Dreiecke“ enthält je ein Feld mit 1, zwei Felder mit 2, drei Felder mit drei, …, sieben Felder mit 7.

In jedem der Dreiecke gilt für die Summe der Zahlen also:
$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + … + 7 \cdot 7$, d. h. $1^2 + 2^2 + 3^2 + … + 7^2$.

Bildet man andererseits für die (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) Felder die Summe der drei Zahlen, dann ergibt sich im „Summendreieck“ überall der Wert 15. Zusammen:

15						
15	15					
15	15	15				
15	15	15	15			
15	15	15	15	15		
15	15	15	15	15	15	
15	15	15	15	15	15	15

$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \cdot (2 \cdot 7 + 1) = 420$,
also $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140$.

Entsprechend: $3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = (1 + 2 + 3 + ... + n) \cdot (2n+1)$, wegen
$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ also $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$.

Von Formeln und Figuren

Heinz Klaus Strick

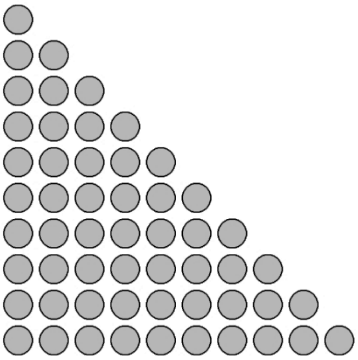
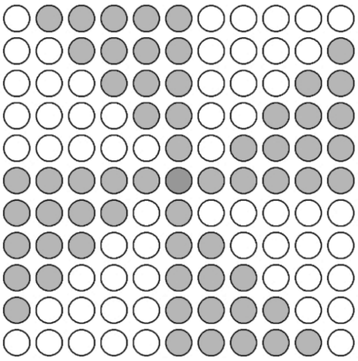
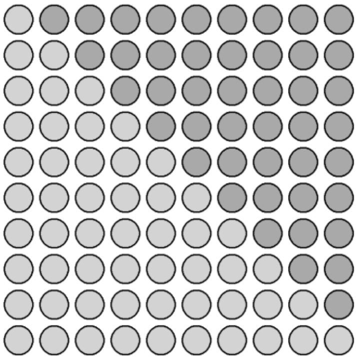
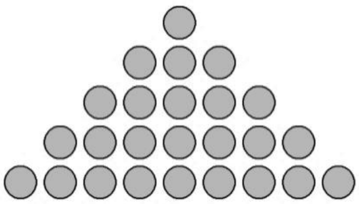
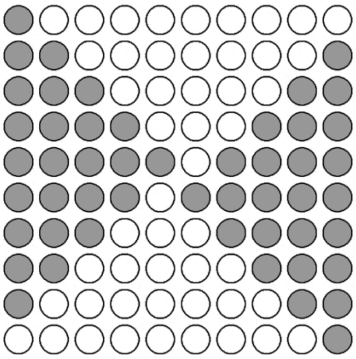
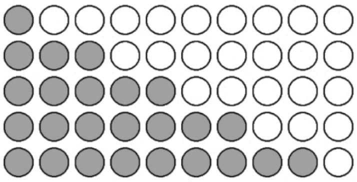

1

2

3

Abb. 1 (oben links) macht deutlich, warum man die Folge der Summen der ersten *n* natürlichen Zahlen als Folge der **Dreieckszahlen** bezeichnet.

a. Mithilfe der **Abb. 2** (oben Mitte) lässt sich eine Formel finden, mit der man die Dreieckszahlen direkt berechnen kann. Wie?

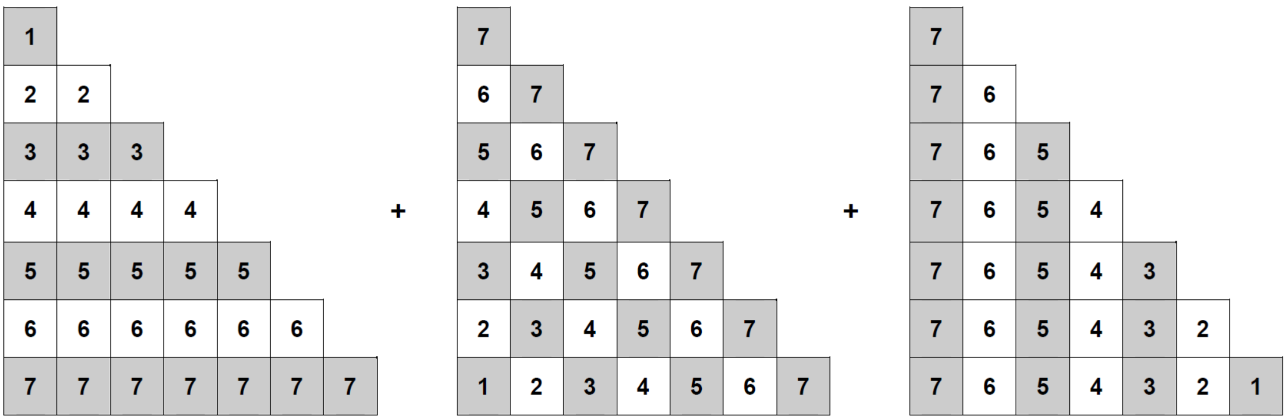
b. Die **Abb. 3** enthält eine Aussage über benachbarte Dreieckszahlen. Welche?

4

5

6


c. Welche Folge von Zahlen kann durch die **Abb. 4** dargestellt werden?

d. Die **Abb. 5** enthält eine Gesetzmäßigkeit für diese Zahlen. Welche?

e. Diese Gesetzmäßigkeit kann man auch an **Abb. 6** sehen. Wie(so)?



f. Die obige Grafik enthält zwar keine Punktmuster, aber eine geschickte Anordnung der ersten (sieben) natürlichen Zahlen. – Wie kann man damit eine Formel für die **Summe der ersten *n* Quadratzahlen** finden?

Geniale Ideen großer Mathematiker

Heinz Klaus Strick

Unter diesem Titel sind in den letzten Jahren zehn Beiträge im *MNU-Journal* erschienen, siehe www.mnu.de. Darin stelle ich wichtige Beiträge berühmter Mathematiker vor und erläutere den Einsatz im Unterricht. Die Ideen hierzu entstanden aus meinen Recherchen für die monatlichen *Spektrum*-Kalenderblätter, vgl. www.spektrum.de/mathematik/monatskalender/index/.
Arbeitsblätter-Download von meiner Website www.mathematik-ist-schoen.de.

Auf den nächsten beiden Seiten hier nun zwei weitere solche Arbeitsblätter.

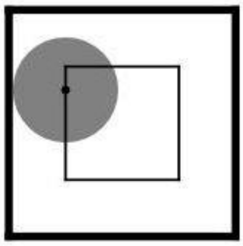
Lösungshinweise zu diesen Arbeitsblättern (S. 19–20)

- **Die DESCARTES'sche Vorzeichenregel** (Einführungsphase Sek. II)

Eine Einsatz-Möglichkeit: Schüler-Gruppen finden selbst geeignete Beispiele, prüfen die Richtigkeit der Regel nach und stellen sie im Plenum vor.

Ein Beweis findet sich z. B. unter www.cut-the-knot.org/fta/ROS2.shtml.

- **BUFFONS Spiel *Franc Carreau*** (ab Klasse 8)



Wenn der Mittelpunkt der Münze im Inneren des Quadrats der Seitenlänge x liegt, gewinnt der erste Spieler. Der Rand dieses Quadrats hat vom Fliesenrand den Abstand r.

Also gilt: $x + 2r = a$.

Das Spiel ist fair, wenn der Flächeninhalt des inneren Quadrates und der des Randes um das innere Quadrat gleich groß sind, d. h., wenn der Flächeninhalt des inneren Quadrates halb so groß ist wie der der Fliese, also $x^2 = \frac{1}{2} a^2$, eingesetzt und umgeformt: $x^2 = \frac{1}{2}(x+2r)^2 = \frac{1}{2}x^2 + 2rx + 2r^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2rx = 2r^2$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2rx = 2r^2 \Leftrightarrow (x-2r)^2 = 8r^2 \Leftrightarrow x = (2+\sqrt{8})\cdot r \approx 4{,}83\cdot r$,
also $a = (4+\sqrt{8})\cdot r = (2+\sqrt{2})\cdot d \approx 3{,}41\cdot d$

Für Euro-Münzen ergeben sich folgende Fliesengrößen für ein faires Spiel:

	2 €	1 €	0,50 €	0,20 €	0,10 €	0,05 €	0,02 €	0,01 €
d (in cm)	2,575	2,325	2,425	2,225	1,975	2,125	1,875	1,625
a (in cm)	8,792	7,938	8,280	7,597	6,743	7,255	6,487	5,548

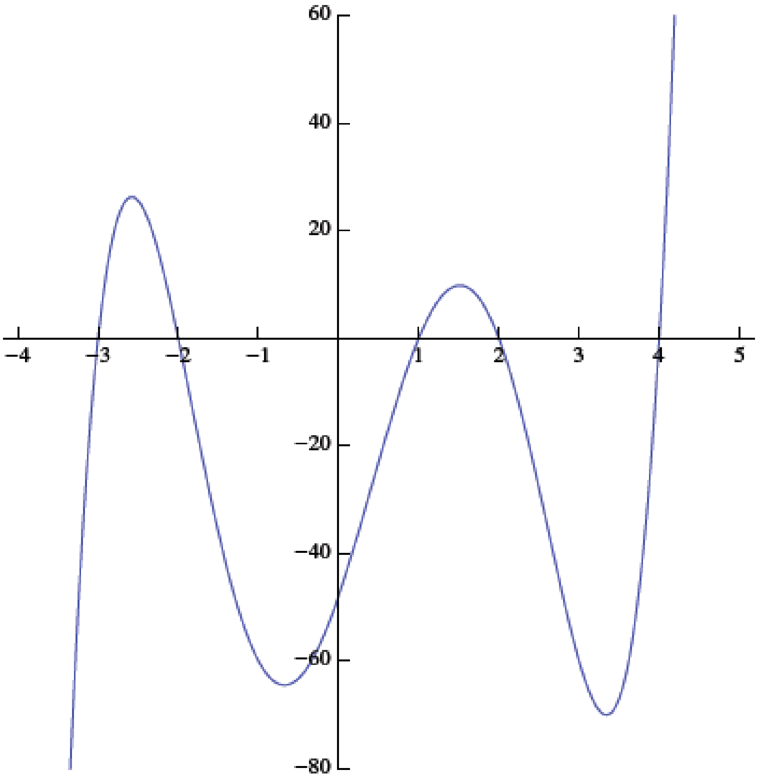
DESCARTES' Vorzeichenregel

HEINZ KLAUS STRICK

Der französische Mathematiker und Philosoph RENÉ DESCARTES (1596–1650) entdeckte eine bemerkenswerte Vorzeichenregel für Polynome $f(x)$:

Die Anzahl der positiven Nullstellen ist gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Zahlenfolge der Koeffizienten von $f(x)$ oder um eine gerade Anzahl geringer. Die Anzahl der negativen Nullstellen ergibt sich aus dem Term für $f(-x)$.

Beispiel: $f(x) = x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 20x^2 + 44x - 48$



Die Folge der Koeffizienten ist: +1, –2, –15, +20, +44, –48

Sie hat drei Vorzeichenwechsel; also hat $f(x)$ maximal drei positive Nullstellen.

Für das Polynom $f(-x)$ gilt: $f(-x) = -x^5 - 2x^4 + 15x^3 + 20x^2 - 44x - 48$

Die Folge der Koeffizienten ist: –1, –2, +15, +20, –44, –48

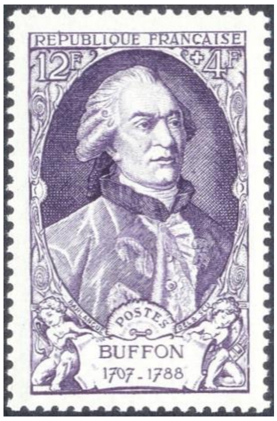
Sie hat zwei Vorzeichenwechsel, also hat $f(x)$ maximal zwei negative Nullstellen.

- Untersucht entsprechend selbst gewählte Beispiele – stimmt die Regel auch dort?

Buffons Spiel *Franc Carreau*

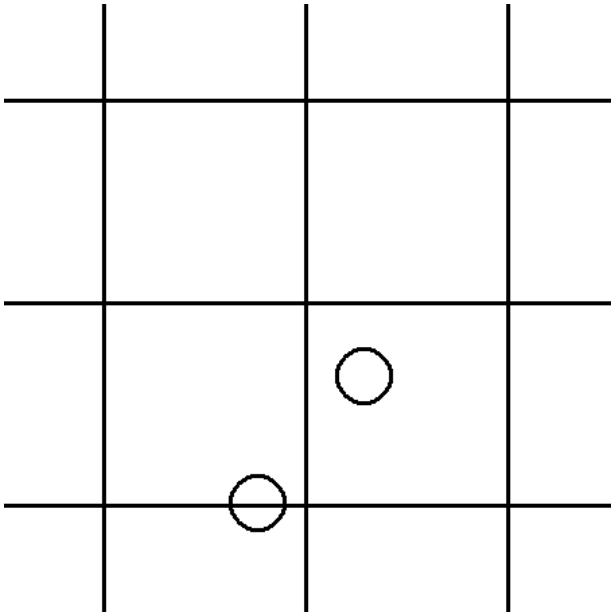
Heinz Klaus Strick

Georges-Louis Leclerc Comte de Buffon (1707–1788) wird bereits im Alter von 26 Jahren als Mitglied in die Königliche Akademie der Wissenschaften gewählt, nachdem er den Beitrag *Mémoire sur le jeu de franc-carreau* eingereicht hatte.



Berühmt wurde Buffon als Herausgeber (zusammen mit Louis Jean-Marie Daubenton) der 50-bändigen *Histoire naturelle, générale et particulière* (Allgemeine Geschichte der Natur), die sich mit der Entstehung der Erde, der Mineralien, der Entwicklung der Organismen und insbesondere der verschiedenen Tierarten beschäftigte.

Beim Spiel *franc carreau* geht es darum, eine Münze mit Radius *r* zufällig auf ein Feld mit quadratischem Fliesenmuster (Fliesenbreite *a*) zu werfen.



Der eine Spieler wettet darauf, dass die Münze vollständig in einem quadratischen Feld liegen bleibt, der andere, dass mindestens eine der Trennlinien zwischen den quadratischen Feldern von der Münze bedeckt wird.

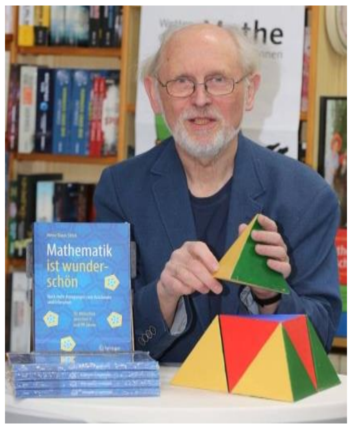
Bei welcher Fliesengröße haben beide Spieler gleiche Chancen, d. h., wann handelt es sich um ein faires Spiel?

Buffon erkannte als Erster, dass es bei der Bestimmung der Gewinnwahrscheinlichkeiten auf die Größe von Flächen ankommt. – Ihr auch?

Literatur / zum Weiterlesen

Strick, Heinz Klaus (2017): Mathematik ist schön.
– Springer, Berlin/Heidelberg.

Strick, Heinz Klaus (2018): Mathematik ist wunderschön.
– Springer, Berlin/Heidelberg.



Heinz Klaus Strick war 37 Jahre lang Lehrer an einem Gymnasium in Leverkusen, zuletzt 21 Jahre auch Schulleiter.
Durch seine Aufsätze, Schulbücher und Vorträge – und seine Mathematik-Kalender – erklärt er, warum Mathematik schön ist.

Den Schülerinnen und Schülern zugewandt – Feedback im Unterrichtsalltag

Andrea Hoffkamp

Warum Feedback so wichtig für das Lernen und die Entwicklung ist, möchte ich hier durch unterrichtspraktische Vorschläge und Einsichten in den Unterricht in einem pädagogisch fordernden Umfeld aufzeigen. Ich skizziere, wie es sich im Unterrichtsalltag derart gestalten lässt, dass es einerseits für mich als Lehrkraft machbar ist und andererseits das Lernen der Schülerinnen und Schüler positiv unterstützt.

In meiner mehrjährigen aktiven Tätigkeit an einer Berliner Gemeinschaftsschule im sozialen Brennpunkt drehte sich alles darum, den Schülerinnen und Schülern durch Schulbildung Chancen zu eröffnen. Schnell war klar: In diesem Umfeld erscheinen die pädagogischen Herausforderungen übermächtig – und dadurch gerät das fachliche Lernen in Gefahr, nachrangig zu erscheinen, denn die Kinder müssen ja erstmal lernen, „im Klassenverband zu funktionieren" oder „ruhig zu sitzen" oder „überhaupt einmal mitzuschreiben". Gerade im Mathematikunterricht ist es besonders fatal, wenn das fachliche Lernen in den Hintergrund rückt: Man hat für eine Menge Stoff noch weniger Zeit und kann elementare Inhalte nicht gründlich und nachhaltig erarbeiten. Andererseits erfordert die gründliche Erarbeitung Konzentration, Ruhe und bei allen Beteiligten die Bereitschaft, sich auf die Inhalte einzulassen. Sprich: Pädagogisches und fachliches Lernen sind nicht zu trennen!

Eine ganz wesentliche Verbindung – wenn nicht sogar die wichtigste – stellt *Feedback* dar. Das ist nicht erst seit der Veröffentlichung der Hattie-Studie (2012) bekannt, aber durch diese Studie sicherlich noch mehr ins Rampenlicht gerückt. Deswegen haben wir gemeinsam in der Mathematik-Fachschaft in der Entwicklungsarbeit an der Schule versucht, durch vielerlei unterrichtspraktische Minimethoden den Feedbackanteil zu erhöhen – mit dem Ziel, einerseits so den Schülerinnen und Schülern zu zeigen „wir sehen dich" und andererseits genügend Rückmeldung zu erhalten, um den Unterricht auf die Gruppen abzustimmen.

Feedback mit Zielen und Erwartungen verbinden

Feedback kann sich nur an vorher vereinbarten Zielen und transparenten Erwartungen orientieren. Gerade zu Beginn, wenn die Kinder aus der Grundschule in die Sekundarstufe I

Andrea Hoffkamp hat mehrere Jahre in der Schulentwicklung an Berliner Schulen gearbeitet. Seit August 2017 hat sie den Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik an der TU Dresden inne.

wechseln (in Berlin mit Beginn der 7. Klasse) oder wenn man als Lehrkraft eine Klasse neu übernimmt, lohnt es sich sehr, hier Zeit und Mühe zu investieren. Wir haben die Schülerinnen und Schüler ihre Ziele oft selbst formulieren lassen, und zwar schriftlich zu Beginn der Stunde – ein positiver und konstruktiver Stundenstart (**Abb. 1**). Die Ziele kann man exemplarisch laut vorlesen lassen: „Wer möchte sein Ziel für heute vorlesen?“ und sich zum Stundenschluss wieder darauf beziehen: „Habt ihr heute euer Ziel erreicht?“.

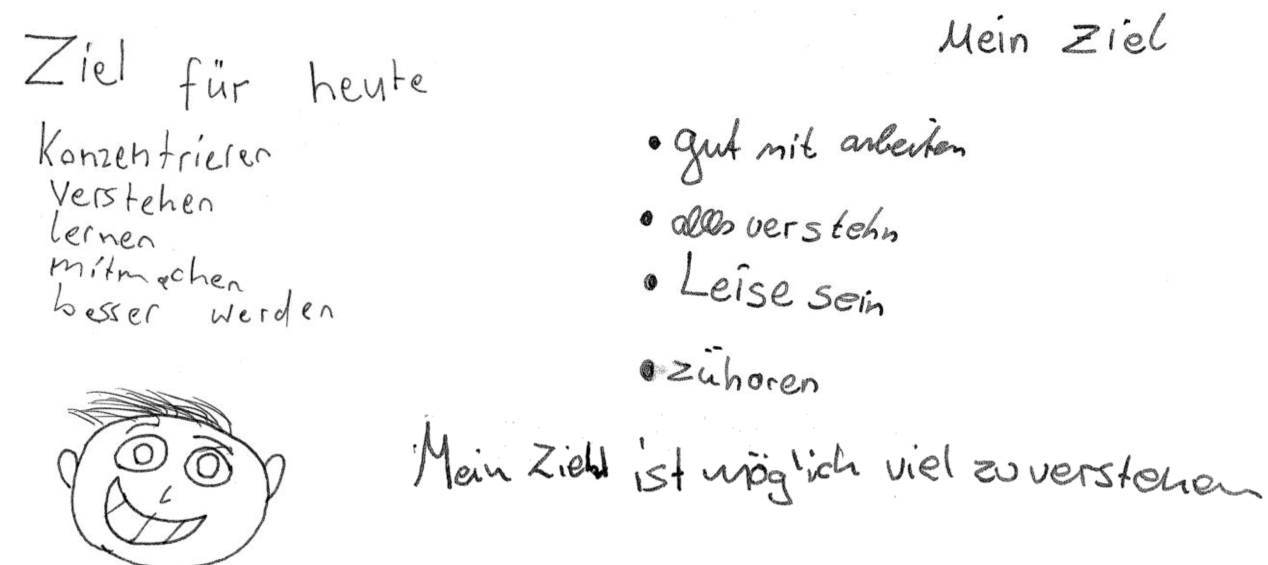
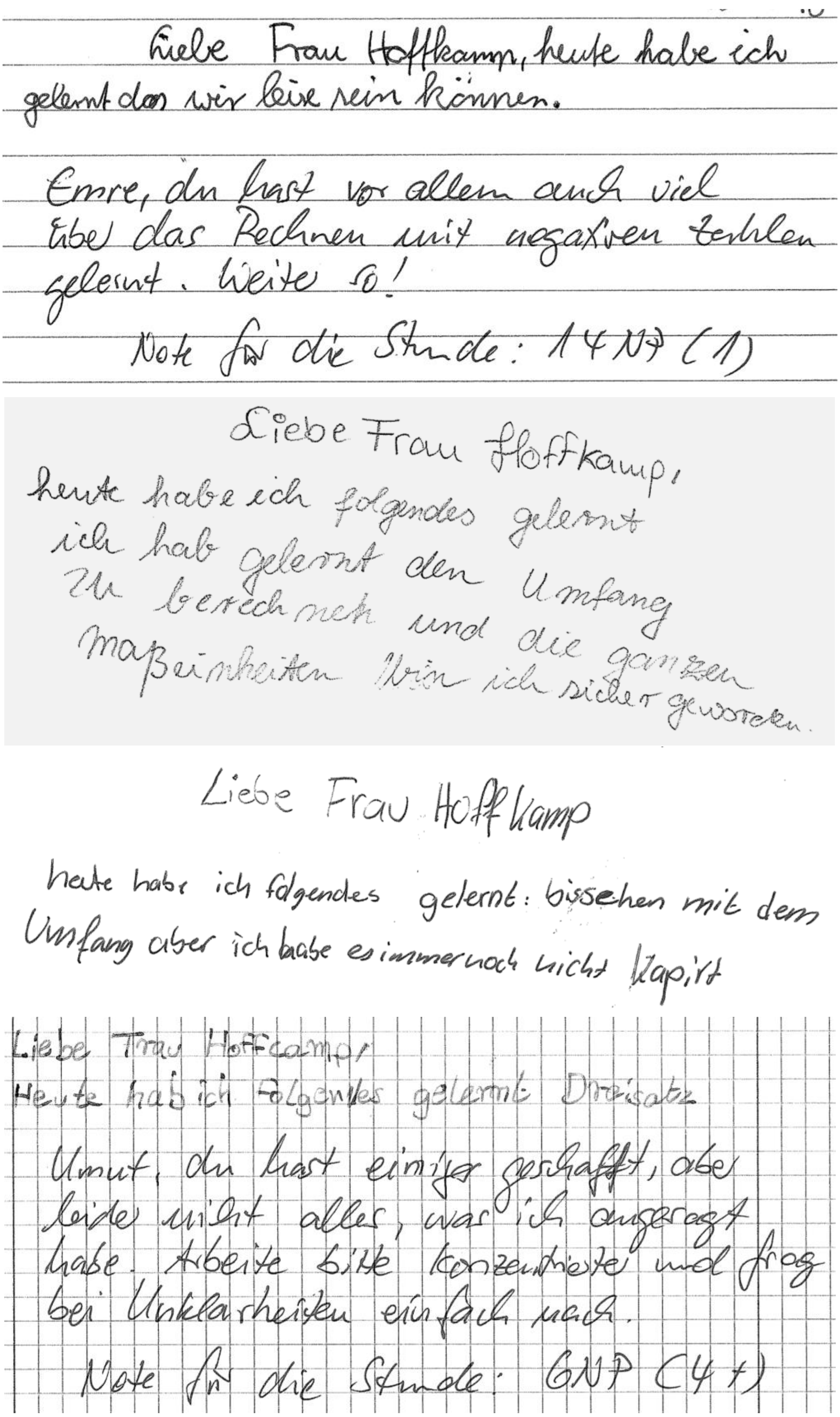


Abb. 1: Ziele zu Stundenbeginn in einer „schwierigen“ 7. Klasse

Gerade in pädagogisch fordernden Klassen war es immer wieder auffällig: Die Kinder formulierten klar, dass sie *natürlich* etwas verstehen wollen und dass sie *selbst erkennen*, dass dies nur möglich ist, wenn wir es *gemeinsam* schaffen, eine konzentrierte Lernatmosphäre zu schaffen. Das war auch für mich wichtig – auch, um mir selbst ein positives Bild der Kinder zu erhalten.

Auch ich als Lehrkraft sollte mein Ziel offenbaren, zum Beispiel: „Ich möchte heute erreichen, dass alle verstehen, wie man zwei negative Zahlen addiert.“ Ich habe stets ein fachliches Ziel formuliert, manchmal auch verbunden mit „… und dass wir mindestens einmal gemeinsam lachen können“ (Letzteres v. a. in Klassen, in denen ich zu viel schimpfen musste und beim Unterrichten teilweise keinerlei Spaß mehr hatte).

Um den Fokus auf das fachliche Lernen zu lenken und Verbindlichkeit bzgl. des Lernens zu schaffen, habe ich immer mal wieder gegen Stundenende aufgefordert: „Bitte schreibt auf, was ihr heute gelernt habt, und gebt es mir ab. Ich schaue mir das an. Ich möchte, dass jede und jeder von euch beginnt mit ‚*Liebe Frau Hoffkamp, heute habe ich Folgendes gelernt …*‘“ (**Abb. 2**). Letzteres schreibe ich sogar an die Tafel, denn ich möchte gerne freundlich angesprochen werden – ein produktiver Abschluss der Stunde, der zugleich zum Einstieg in die Folgestunde dienen kann, indem ich Teile dieses Feedbacks einbeziehe: „Manche haben geschrieben, dass … Deswegen greifen wir jetzt



Liebe Frau Hoffkamp, heute habe ich
gelernt das wir leise sein können.

Emre, du hast vor allem auch viel
über das Rechnen mit negativen Zahlen
gelernt. Weiter so!
Note für die Stunde: 14 NP (1)

Liebe Frau Hoffkamp,
heute habe ich folgendes gelernt
ich hab gelernt den Umfang
zu berechnen und die
maßeinheiten bin ich sicher geworden. ganzen

Liebe Frau Hoffkamp

heute habe ich folgendes gelernt: bissehen mit dem
Umfang aber ich habe es immernoch nicht kapirt

Liebe Frau Hoffcamp,
Heute hab ich folgendes gelernt Dreisatz

Umut, du hast einiges geschafft, aber
leider nicht alles, was ich angesagt
habe. Arbeite bitte konzentrierter und frag
bei Unklarheiten einfach nach.
Note für die Stunde: 6 NP (4+)

Abb. 2: Stundenabschluss in verschiedenen 7. Klassen: „Was habe ich heute gelernt?“ – manche mit schriftlichem Feedback von mir versehen (in diesem Fall einschließlich der Note für die Arbeitshaltung in der Stunde)

Folgendes nochmals auf ...“. So merken alle, dass das Feedback seinen Zweck hat und dass ich sie ernst nehme und versuche, sie „zu sehen“. In besonders herausfordernden Klassen habe ich hier auch noch extra Zeit und Mühen investiert und jedem Kind schriftlich Feedback gegeben. Das hat sich später durchweg ausgezahlt.

Häufig werde ich gefragt: „Und was machst du, wenn die nichts aufschreiben?“ Natürlich haben sich einige verweigert und nichts notiert. Was tut man da? Das Einzige und Naheliegende ist, die Kinder anzusprechen, ihnen die Erwartungen zu nennen („Ich habe gesehen, dass du nichts abgegeben hast. Ich erwarte von dir, dass du beim nächsten Mal etwas schreibst.“), ihnen zu sagen, worum es geht: „Es geht darum, dass *du* etwas lernst.“ Wenn die Kinder erkennen, dass diese Maßnahmen nicht Selbstzweck sind, dann schreiben sie schließlich doch. Ich versuche auch nicht, ausschweifend den Sinn zu erklären, sondern formuliere unaufgeregt und sehr klar meine Erwartungen. Das ist Teil der Erziehungsarbeit.

Stundenabschlüsse mit Feedback verbunden sind auch fachlich möglich. Beispielsweise habe ich beim Thema „Zuordnungen“ zum Stundenende gesagt: „Ihr alle habt ja über den Tag gesehen immer mal mehr und mal weniger Hunger.“ Dann habe ich ein Koordinatensystem angezeichnet und aufgefordert, dass nun alle in den verbleibenden 5–10 Minuten ihr Hungergefühl über den Tag mithilfe eines Graphen oder eines Diagramms beschreiben und es bei mir abgeben. Die **Abb. 3** zeigt diejenigen Graphen, die ich dann zum Stundeneinstieg in die nächste Stunde genutzt habe, um über

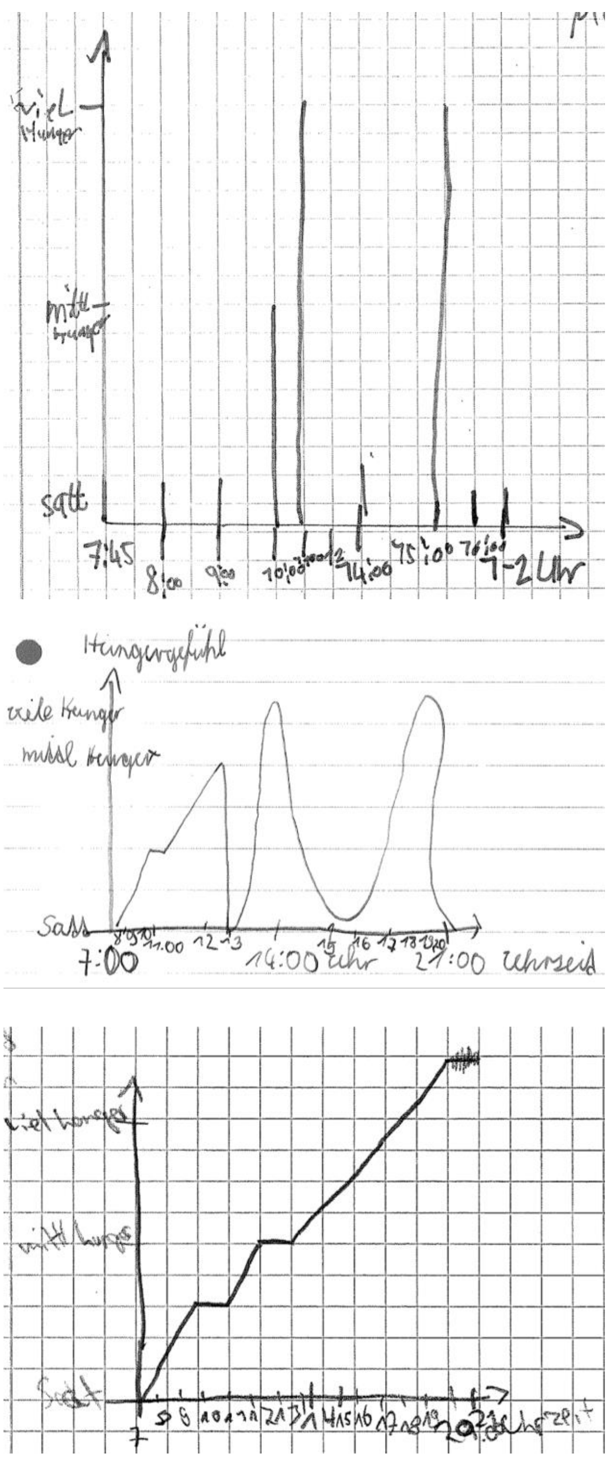


Abb. 3: Hungergefühl-Graphen als Stundenabschluss und dann als Stundeneinstieg

funktionale Abhängigkeiten ins Gespräch zu kommen. Ich habe dazu die Graphen eingescannt und auf eine Folie gedruckt. Ein Schüler tat uns schon leid, weil sein Hungergefühl über den Tag immer stärker wurde. Bei anderen schwankte das Hungergefühl, und wir haben erklärt, was man aus diesen Schwankungen ablesen kann. Ein anderer zeichnete keinen Graphen, sondern Balken. All dies ermöglichte es mir, durch Feedback an den Stand der Schülerinnen und Schüler anzuknüpfen, und ich musste mir geeignete Beispiele noch nicht einmal selbst ausdenken.

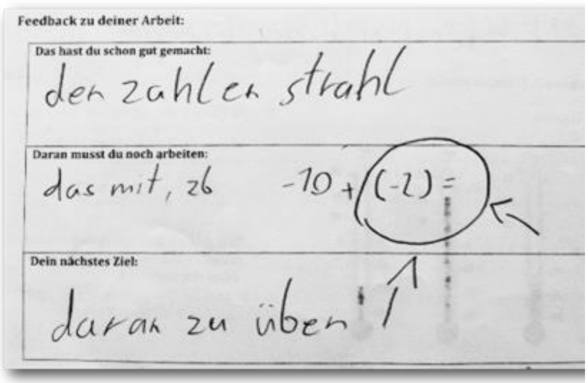


Abb. 4: Feedbackfeld auf der Klassenarbeit einer 7. Klasse, ausgefüllt von einem Schüler

Auch Klassenarbeiten habe ich mit Feedbackfeldern versehen (**Abb. 4**). Diese kann ich selbst ausfüllen oder von den Schülerinnen und Schülern ausfüllen lassen. Auch hier gilt: Feedback muss mit Zielsetzungen verbunden werden, wenn es lernwirksam sein soll, und es soll anregen, über das eigene Lernen zu reflektieren. Das funktioniert am besten, wenn es sehr konkret gestaltet ist.

Feedback in „Täglichen Übungen" zugewandt gestalten

Tägliche Übungen sind eine Folge von 6–10 kleinen Aufgaben, die in der Regel zum Stundenbeginn bearbeitet werden (regelmäßig – aber nicht unbedingt „täglich"). Gerade in sehr heterogenen Klassen ist das produktive und regelmäßige Üben und Absichern von Fertigkeiten und Grundwissen wesentlich für den Lernerfolg – denn nur auf sicherem Grundwissen kann neues Wissen entstehen und können Strategien entwickelt werden. Wir wollten in der Schulentwicklung dieses Grundwissen und diese Grundfertigkeiten verbindlich machen, und zwar ohne ständigen Notendruck auszuüben. Verbindlichkeit entsteht auch hier durch Klarheit der Erwartungen und Ziele und durch Feedback. Die Erwartungen und Ziele sind dadurch bestimmt, dass Tägliche Übungen für alle als *Mindestniveau* formuliert werden: Ohne diese Kenntnisse und Fertigkeiten kann der weitere Unterricht nicht wirklich verfolgt werden. Dabei haben wir die Täglichen Übungen in unseren Gruppen nicht „gemischt" gestaltet (haben also nicht verschiedene Inhalte wie Bruchrechnung, Termumformungen, Prozentrechnung usw. in *eine* Aufgabenfolge aufgenommen), sondern haben ausschließlich auf die in der Stunde zu bearbeitenden Themen fokussiert – alles andere hätte die teils sehr lernschwachen Klassen überfordert. Die Täglichen Übungen sollten also gezielt die Themen der jeweiligen Stunde vorbereiten, Vorwissen aktivieren und zugleich uns als Lehrerinnen und Lehrern ggf. notwendige Anpassungen ermöglichen, indem wir diagnostisches Feedback einholen.

Abb. 5: Kinder mit Mini-Whiteboards zur Aufgabe „3/4 von 16“.

Arbeiten mit Mini-Whiteboards in Täglichen Übungen

Was sind Mini-Whiteboards?

Man kann diese selbst herstellen (oder teuer bestellen), indem man DIN-A4-Blätter laminiert. Ich empfehle ein weißes und ein rotes A4-Blatt übereinanderzulegen und gemeinsam zu laminieren, so dass man ein rote und eine weiße Seite hat. Mit den Stiften habe ich inzwischen viel experimentiert. Am besten eignen sich *drywipe markers*, trocken auswischbare Whiteboardmarker. Manche haben sogar am Deckel des Stiftes einen kleinen Schwamm, mit dem sich das Geschriebene leicht wieder entfernen lässt.

Wie arbeitet man mit Mini-Whiteboards?

Man verteilt die Whiteboards und Stifte, und statt die Aufgaben-Lösungen auf ein Blatt zu schreiben, schreiben die Schülerinnen und Schüler die Lösungen auf das Board und halten dieses hoch (**Abb. 5**). Hat man eine rote und eine weiße Seite, so kann man auch Wahr-falsch-Aussagen (**Abb. 6**) entscheiden lassen (wahr = weiße Seite hochhalten, falsch = rote Seite hochhalten). Entweder man liest die Aufgaben nur vor, oder man schreibt sie nach und nach an die Tafel, oder man bereitet eine Folie vor.

Meine Kollegin brachte diese Idee aus Australien mit. Nach ihrem ersten Versuch mit den Mini-Whiteboards mit einer schwierigen 7. Klasse schrieb sie:

> *Hatte heute nur die halbe Klasse. Das war genial. Wir haben mit den Whiteboards geübt. Gleich zu Anfang schrieb B. noch „ich kann nix“ auf ihr Board, aber später war sie sogar mal an der Tafel. Am Ende schrieb sie dann „ich habs kapiert“. Auch A. hat super mitgemacht und etwas Richtiges an die Tafel geschrieben. Ein schöner Moment. Die Praktikantin hatte Tränen in den Augen.*

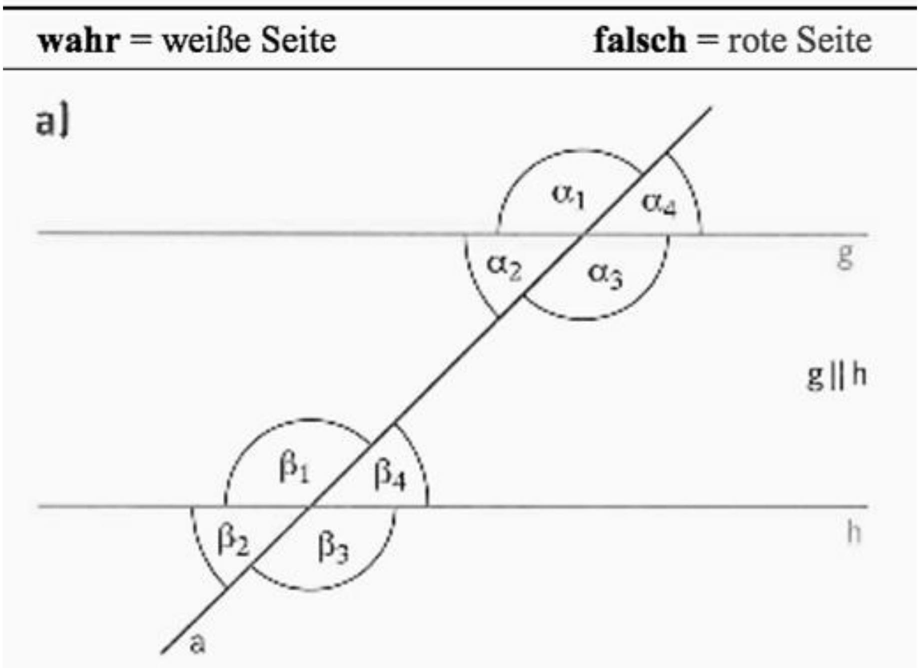


Abb. 6: Folie einer Täglichen Übung unter Verwendung von Mini-Whiteboards – mit Lösungen
(6. Klasse, Oberschule, Dresden)

1. Nebenwinkel addieren sich zu 180° – wahr oder falsch?	Wahr
2. Nebenwinkel sind niemals gleich groß!	falsch
3. Wechselwinkel sind gleich groß – wahr oder falsch?	wahr
4. α_1 und β_1 sind Stufenwinkel – wahr oder falsch?	wahr
5. α_4 und β_1 sind Wechselwinkel – wahr oder falsch?	falsch
6. α_1 und β_3 sind Wechselwinkel – wahr oder falsch?	wahr
7. $\beta_4 = 45°$. Wie groß ist dann β_2?	$\beta_2 = 45°$
8. $\alpha_1 = 115°$. Wie groß ist α_2?	$\alpha_2 = 65°$

Bewegtes Rechnen

Aufgabe				Lösung
3 * 7 =	18	20	21	21
9 * 8 =	80	72	54	72
11 * 5	55	50	44	55
28 : 7 =	4	5	3	4
32 + 4 =	128	35	36	36
15 : 3 =	3	4	5	3
54 : 9 =	6	7	9	6
40 * 4 =	120	144	40	40
24 * 3 =	75	72	63	72

Abb. 7: Bewegtes Rechnen in Täglichen Übungen: Körperfeedback

Körperfeedback

Hattie (2012) spricht davon, „Lernen sichtbar zu machen". Für Feedback bedeutet dies, dass wir unterrichtspraktische Methoden benötigen, die uns zeigen, wo die Kinder tatsächlich stehen – und die umgekehrt den Kindern zeigen, dass wir als Lehrkraft auch sehen wollen, was sie schon können und was noch zu tun ist. Das schafft Verbindlichkeit und zugleich Vertrauen.

Martin Kramer beschreibt in seinen Bänden „Mathematik als Abenteuer" (Kramer 2017) viele kleine Methoden, die durch Körperfeedback das „Lernen sichtbar machen". Viele dieser Methoden kann man in Täglichen Übungen nutzen, z. B. die „lebendigen Winkelmesser": Die Kinder legen die Hände aneinander und strecken die Arme aus. Alle drehen sich zum Fenster. Die Lehrkraft sagt: „Auf drei drehen sich alle gleichzeitig um 90° nach links." Danach erfolgen von dieser Position aus weitere Drehungen nach links oder nach rechts um andere Winkelgrößen. Feedback erhalten die Kinder durch den visuellen Vergleich mit den anderen, und die Lehrkraft erkennt, wie weit die Standardwinkelgrößen und der Unterschied zwischen links und rechts schon *körperlich* verinnerlicht sind.

Ein Kollege gab mir eine Folie (**Abb. 7**), die er für Feedback in einer 5. Hauptschulklasse in Bayern für Tägliche Übungen nutzte. Die Rückmeldung geschieht hier ebenso durch Körperfeedback. Die Aufgaben und anschließend die Lösungen werden auf dem Overheadprojektor nach und nach aufgedeckt. Die Verbindlichkeit entsteht dadurch, dass tatsächlich jedes Kind sichtbar seine Lösung präsentiert.

Abschlussbemerkungen

Ein lernförderliches Klima setzt eine zutrauende Haltung und Vertrauen voraus. Zugleich geht es gerade in Mathematik um einen konstruktiven Umgang mit Fehlern, um auch die Leistungsangst abzubauen, die hemmt. Deswegen ist häufiges und konstruktives Feedback, das auf die Sache und auf das Lernen bezogen ist, wesentlich für den Lernerfolg und die Beziehungsarbeit. Gerade an Schulen in sozialen Brennpunkten bekommen Kinder zu Hause oft wenig Aufmerksamkeit. Da tut es ihnen sichtlich gut, Feedback zu erhalten – wenn es sich zugleich um *konstruktive* Aufmerksamkeit handelt, die die Kinder tatsächlich weiterbringt.

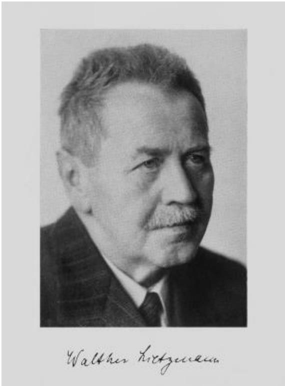
Literatur

Hattie, J. (2012): Visible Learning for Teachers – Maximising impact on learning. Routledge, London/New York.

Kramer, M. (2017): Mathematik als Abenteuer, Band I: Geometrie und Rechnen mit Größen. Klett/Kallmeyer, Seelze.

Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen

Anselm Lambert



Walt(h)er Lietzmann war wohl der einflussreichste deutschsprachige Mathematikdidaktiker in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Er hinterließ uns ein überaus umfangreiches Werk mit einem beeindruckend breiten Spektrum, das von seiner damals prägenden und auch heute noch äußerst lesenswerten dreibändigen „Methodik des mathematischen Unterrichts“ über zahllose Zeitschriftenbeiträge und Unterrichtswerke, insbesondere zur Geometrie, bis hin zu seinen Büchern zur Unterhaltungsmathematik reicht.

Lustiges und Merkwürdiges – eine Erfolgsgeschichte

Lietzmanns Buch „Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen“ erschien in erster Auflage1922 als Ausarbeitung einer Vorlesung, die er 1921 an der Universität Göttingen gehalten hatte, mit dem expliziten Ziel, *„die für den Unterricht brauchbaren Gebiete der Unterhaltungsmathematik zusammenzustellen und überhaupt zu stärkerer Berücksichtigung solcher Probleme in der Schule anzuregen.“* Diese Anregungen sollen sowohl der höheren Schule als auch der Volksschule zu Gute kommen, aber auch *„die vielen großen und kleinen, älteren und jüngeren Freunde der Mathematik [erreichen], die in den Stunden der Muße gern über ein unterhaltsames Problem grübeln, über einen mathematischen Scherz lachen und mit dem erworbenen Gut anderen Liebhabern eines solchen Genusses eine Freude machen.“* (Lietzmann 1922, 3).

Von der ersten Auflage an gliedert Lietzmann das Buch in drei Teile (unter im Laufe der Zeit leicht variierten Überschriften): I. Allerlei (Arten) Unterhaltungsmathematik; II. Von den Zahlen; III. Von den (geometrischen) Formen.

In seinen weiteren Auflagen erlebte das Buch zahlreiche Erweiterungen und Ergänzungen, der Umfang wuchs von anfänglich 187 Seiten auf letztendlich 276 Seiten, die auch heute noch sinnvolle Anregungen für unseren Mathematikunterricht bieten. Ich möchte hier nun ein paar dieser Anregungen vorstellen, mit vielen Originalzitaten. Vielleicht bekommen Sie ja danach Lust, selbst bei Lietzmann weiter zu schmökern.

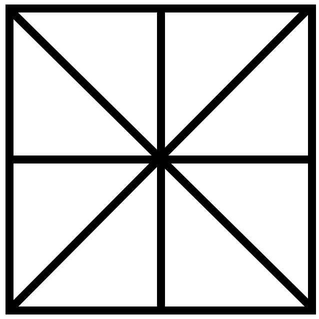
Anselm Lambert ist promovierter Mathematiker und berufener Didaktiker. Unterrichtserfahrung sammelte er an einer Realschule. Seit 2007 ist er der Professor für Mathematik und ihre Didaktik im kleinen Saarland, in dem Großes entsteht. Mit seinen Forschungsgebieten „Individuelle Zugänge zur Mathematik“ sowie „Historiographie des MU“ arbeitet er beharrlich daran, dass Mathe(matik) in der Mathematikdidaktik nicht in Vergessenheit gerät.

Allerlei Unterhaltungsmathematik

Mathematik und Spiel

„Das Spiel zu zweien ist das am häufigsten auftretende. Es gehören eigentlich alle die Probleme hierher, bei denen eine Person einer zweiten eine Aufgabe zu lösen gibt, also das Erraten gedachter Zahlen, das Lösen eingekleideter Gleichungen usf. Als Beispiele von Spielen anderer Art, bei denen beide Spieler gleichartige Operationen ausführen, um irgendein vorgezeichnetes Ziel zu erreichen, nenne ich Brettspiele. Jeder kennt Schach, Dame, Mühle, vielleicht auch Halma, Salta, Laska. [Anmerkung: Die letzten beiden sind damals sehr populäre Varianten des Damespiels.] Die naheliegende Frage ist hier, ob ein Spieler bei gegebener Anfangsstellung das Endziel erzwingen kann, mit anderen Worten, ob er in der Lage ist, durch geeignet gewählte Operationen mit Sicherheit zu gewinnen. Ich will das an einer vereinfachten Form des Mühlespiels […] zeigen.“ (Lietzmann 1922, 52)

1. Anregung für unseren Unterricht



Gibt es im folgenden Spiel eine Gewinnstrategie? Gespielt wird mit drei Steinen pro Spieler auf dem Feld rechts. Ziel ist es, seine drei Steine – durch anfängliches Setzen auf je einen der neun Schnittpunkte oder danach durch Schieben entlang einer Linie zwischen zwei Schnittpunkten – auf einer Gerade liegen zu haben. Wem dies zuerst gelingt, der hat gewonnen (nach Lietzmann 1922, 52 f.).

Kurz: Es gibt eine Gewinnstrategie. Der erste Spieler setzt seinen ersten Stein in die Mitte. Der zweite Spieler hat dann zwei(!) Möglichkeiten: eine Ecke wählen oder eine Seitenmitte. Diese beiden Fälle können nun systematisch durchgespielt werden, unter Berücksichtigung erzwungener Züge – zum Vermeiden einer drohenden Mühle – und mit möglichem Schieben nach dem Setzen. Spielen Sie es selbst durch!

„Typisch für die Behandlung solcher Probleme ist das Durchdiskutieren aller möglichen Fälle. Das ist nicht immer so einfach wie im vorliegenden Fall, wo ich mich schließlich mit dem Durchdenken nur zweier Fälle begnügen konnte.“ (Lietzmann 1922, 54)

Mit diesem Spiel – statt an wenig greifbaren Wurzelungleichungen – lassen sich die beim Argumentieren unverzichtbaren Fallunterscheidungen spielerisch erarbeiten. Mühle ist gewiss angenehmer als eine Wurzelbehandlung.

Fehler- und Unterrichtskultur

„Man kann je nachdem, ob die Fehler absichtlich oder unabsichtlich gemacht werden, zwischen Trugschlüssen und Fehlschlüssen unterscheiden. Das Kapitel der Fehler ist für Schule und Schüler ein trauriges Kapitel, und man wird zunächst zweifelhaft sein, ob man ihm eine merkwürdige oder gar lustige

Seite abgewinnen kann. Jedenfalls sollte die Fröhlichkeit nicht dadurch zustande kommen, daß sich Lehrer oder Schüler auf Kosten eines anwesenden und […] gar namentlich genannten Kameraden lustig machen. Aber andererseits lernt man auch hier gerade von den Fehlern, den eigenen und denen anderer, wenn man ihnen Recht auf den Grund geht." (Lietzmann 1922, 55)

Man kann aus echten Fehlern sogar mehr lernen *„[…] als von einer mechanisch glatt heruntergerechneten richtigen Lösung."* (Lietzmann 1922, 64)

Die folgende Anregung stellt einen interessanten Trugschluss vor; mit Umformungen der ersten binomischen Formel lässt sich eine äußerst überraschende Aussage über natürliche Zahlen „beweisen".

2. Anregung für unseren Unterricht

Durch Umformung von Gleichungen wird gezeigt: Jede natürliche Zahl ist gleich ihrem Nachfolger. Das ist natürlich Quatsch. Finde den Fehler in den Umformungen (Lietzmann 1922, 59):

„Es ist

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

also

$$(n+1)^2 - (2n+1) = n^2.$$

Ich subtrahiere beiderseits $n(2n+1)$ und erhalte dann

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1);$$

ich addiere beiderseits $\frac{1}{4}(2n+1)^2$, so daß ich erhalte:

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}(2n+1)^2 = n^2 - n(2n+1) + \frac{1}{4}(2n+1)^2.$$

Jetzt steht beiderseits ein Quadrat, nämlich

$$\left((n+1) - \frac{1}{2}(2n+1)\right)^2 = \left(n - \frac{1}{2}(2n+1)\right)^2.$$

Ziehe ich die Quadratwurzel, so erhalte ich

$$n + 1 - \frac{1}{2}(2n+1) = n - \frac{1}{2}(2n+1),$$

woraus schließlich folgt

$$n + 1 = n.\text{“}$$

Den konstruktiven Umgang mit Fehlern hat Lietzmann konsequent verfolgt und ihm ein eigenes, 1913 gemeinsam mit Viggo Trier verfasstes, mehrfach erweitertes und überarbeitetes Büchlein „Wo steckt der Fehler?" gewidmet, in dem sich zahlreiche konkrete Beispiele – auch von Fehlschlüssen – finden.

Von den Zahlen

Erraten einer oder mehrerer Zahlen

Wenn wir im Unterricht mit der verblüffenden Fähigkeit auftreten, Zahlen erraten zu können, erzeugen wir leicht eine Motivation zum Aufstellen von Termen, denn ein Term und dessen Umformung entlarven den Zaubertrick.

3. Anregung für unseren Unterricht

Bei der folgenden Rechnung erhalten alle, die sich nicht verrechnen, 10 als Lösung, unabhängig davon, mit welcher Zahl sie beginnen.

> *„Denke dir eine Zahl; addiere 11, das Ergebnis multipliziere mit 2, subtrahiere vom Produkt 20. Was herauskommt ist mit 5 zu multiplizieren. Subtrahiere das Zehnfache der gedachten Zahl. Dann kommt 10 heraus.“* (Lietzmann 1922, 106)

Die Auflösung des Zaubertricks: $((n+11)\cdot 2-20)\cdot 5-10\cdot n=\cdots=10$

Damit können wir nun leicht intelligentes Üben zum Aufstellen und Umformen von Termen initiieren: Die Schülerinnen und Schüler erfinden selbst eigene Zaubertricks, mit möglichst vielen Rechenarten, zu einer jeweils selbstgewählten Zielzahl. Ich habe wiederholt die Erfahrung gemacht, dass Schülerinnen und Schüler dann am Nachmittag ihre Familie verblüffen – und dort unaufgefordert und sehr begeistert vom Mathematikunterricht erzählen.

4. Anregung für unseren Unterricht

Durch die folgende Rechnung können wir zauberhafterweise auf das Ergebnis eines dreifachen Würfelwurfes zurückschließen (Lietzmann 1922, 116).

> *„[…] A will diesen Wurf erraten und läßt die Augenzahl des ersten Würfels mit 2 multiplizieren, dann 5 addieren, dann das Ergebnis mit 5 multiplizieren, die Augenzahl des zweiten Würfels addieren, dann 10 addieren, mit 10 multiplizieren, schließlich noch die Augenzahl des dritten Würfels hinzufügen. […] A subtrahiert zunächst 350 und liest dann aus [dem Ergebnis][…] die Augenzahlen [ab] […].*
>
> *Erklärung: Es wird, wenn p, q und r die drei Zahlen sind, gebildet:*
>
> $$\big((2\cdot p+5)\cdot 5+q+10\big)\cdot 10+r=\cdots=100\cdot p+10\cdot q+r+350.\text{“}$$

Eine immer noch wunderbare Idee, die sich ebenfalls wieder gut in Selbsttätigkeit variieren lässt – ich bevorzuge dabei im Unterricht allerdings die Variablen h, z und e für die Anzahl der Hunderter, Zehner und Einer.

Analog können wir eine gedachte Zahl erraten: *„Denk dir eine Zahl, nimm sie noch einmal; zähle 4 hinzu; nimm die Hälfte; zähle 7 hinzu; multipliziere das Ergebnis mit 8; ziehe 12 ab; dividiere durch 4; ziehe 11 davon ab.“* (Lietzmann 1922, 111). Der beschreibende Term vereinfacht sich zu $2\cdot n+4$. Wir müssen also vom genannten Resultat 4 abziehen und dann durch 2 teilen, um die gedachte Zahl zu nennen. Und auch dies bietet wieder eine sehr schöne Spielwiese für sinnvoll erlebte Eigentätigkeit mit Termen.

Von den Formen

Allerlei Wanderaufgaben

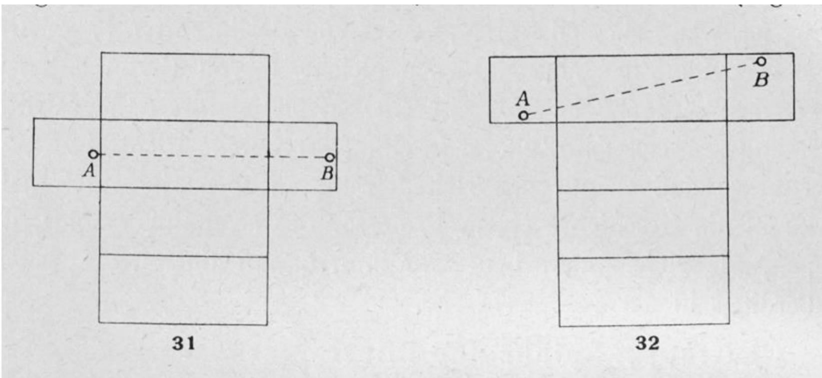
Aus den ganz unterschiedlichen Wanderaufgaben möchte ich hier – da der Platz in diesem Rundbrief nun allmählich zu Neige geht – nur eine aufgreifen, bei der Netze uns in der Raumanschauung sehr unterstützen und die ein fruchtbares kreatives Übungsfeld für den Satz des Pythagoras öffnet.

5. Anregung für unseren Unterricht

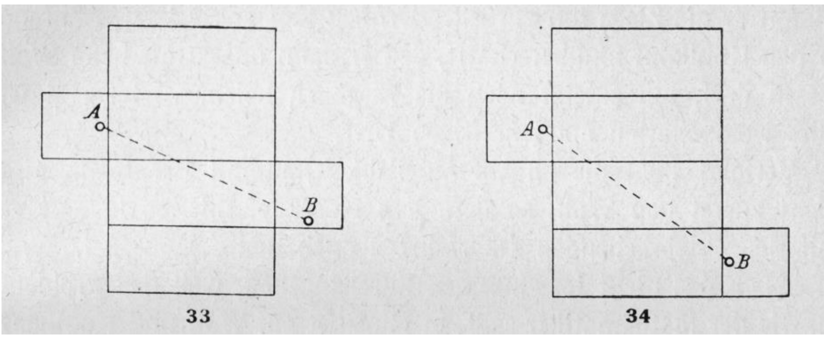
„Die Spinne will auf kürzestem Weg von einem Punkt A einer Zimmerwand zu einem Punkt B auf der gegenüberliegenden Wand. Welchen Weg muß sie nehmen?

Beispiel: Der Raum ist 10 m lang, 4 m breit und 4 m hoch. Die Spinne sitzt auf einer der quadratischen Seitenwände des Raumes und zwar $\frac{1}{3}$ m über dem Boden in der Mittellinie des Quadrates. Die Fliege, auf die die Spinne loskriecht, sitzt auf der gegenüberliegenden Wand, gleichfalls in der Mittellinie und $3\frac{2}{3}$ m über dem Boden, also $\frac{1}{3}$ m von der Decke ab. Welchen Weg muss die Spinne nehmen und wie lang ist er?

Antwort*: Denke dir die Wand mit der Spinne, die mit der Fliege und nun eine Zwischenwand, entweder den Fußboden (Fig. 31) oder eine Seitenwand (Fig. 32) in eine Ebene geklappt (in den Figuren sind auch noch von den übrigen Wandflächen die Netze mitgezeichnet). Dann wird man A mit B verbinden durch eine Gerade und bekommt damit in jedem Falle einen möglichen Weg. Schon der Augenschein lehrt aber, daß die in Fig. 31 und 32 erhaltenen Wege durchaus nicht gleichlang sind. […] Es gibt aber noch eine ganze Reihe anderer Möglichkeiten, auf den Zimmerwänden verlaufende geradlinige Verbindungen zwischen A und B herzustellen. Fig. 33 und 34 zeigen zwei Beispiele.“* (Lietzmann 1922, 143 ff.)



31 32

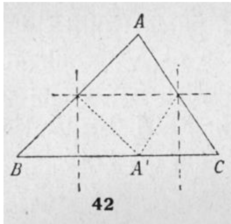


33 34

Sind das alle Fälle? Welcher Weg ist denn nun der kürzeste? Tippen Sie mal, bevor sie rechnen! Das Ergebnis ist verblüffend und somit merk(ens)würdig. Und wie sieht es bei anderen Quadern und anderen Positionen von Spinne und Fliege aus? Gibt es Fälle, in denen zwei unterschiedliche Wege doch gleich lang sind? Wie steht's im Zylinder? Fragen über Fragen … ☺

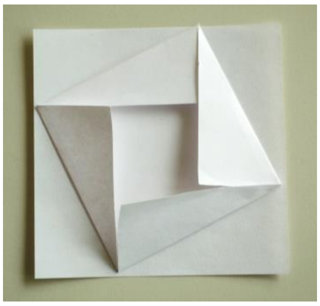
Faltaufgaben

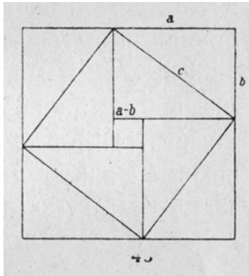
„Faltbeweise werden […] im üblichen Unterricht vielfach genutzt. Ich erinnere nur an den Beweis des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck [(Fig. 42)]“ (Lietzmann 1922, 157).



6. Anregung für unseren Unterricht

„Noch ein anderes Beispiel zeige Fig. 43, die man sich naturgemäß leicht durch Falten herstellen kann. Sie liefert zwei Beweise für den pythagoreischen Lehrsatz.“ (Lietzmann 1922, 157).

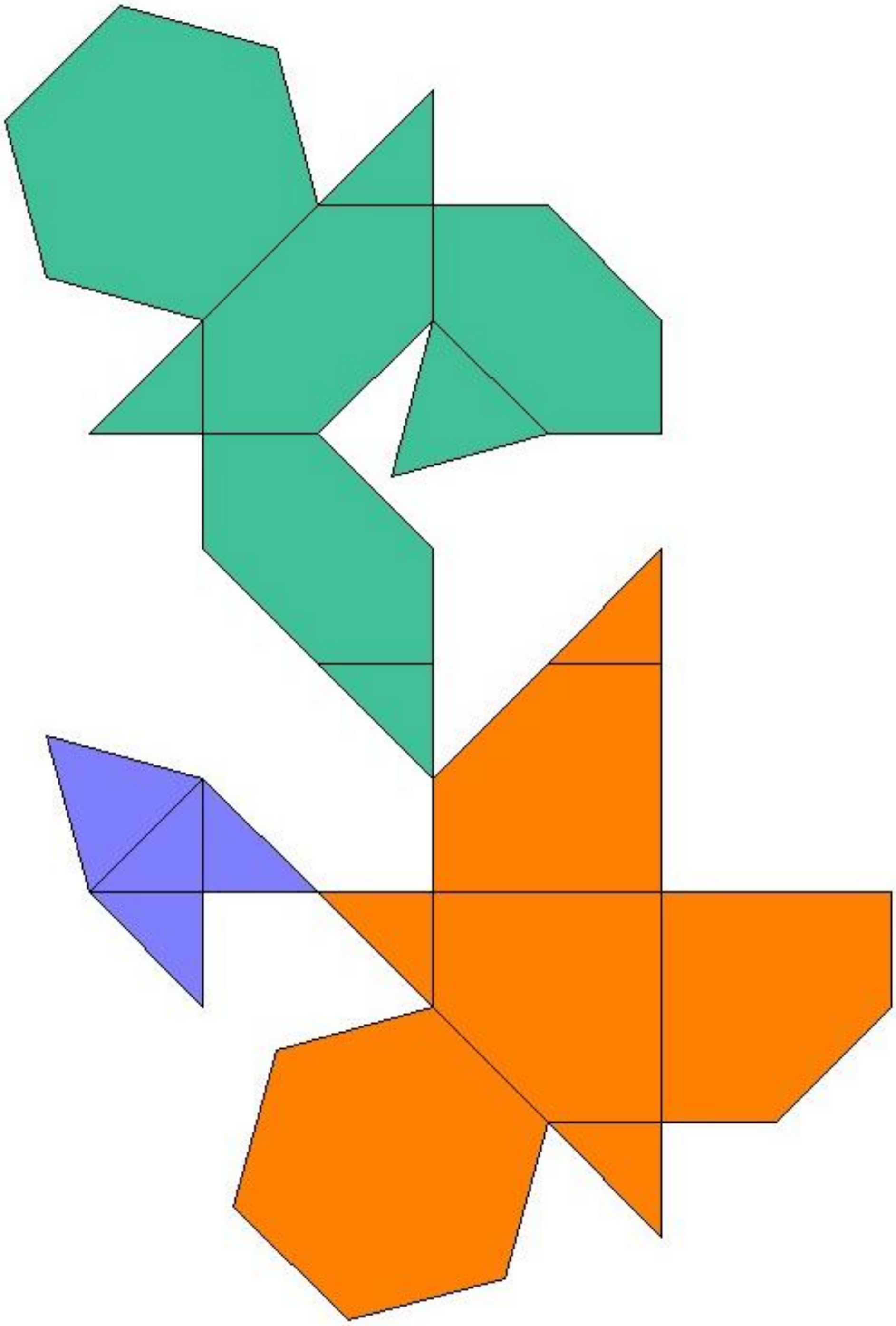




An welche Beweise hat Lietzmann hier wohl gedacht? In Mathe(matik) geht es darum, proximale Fragen zu stellen – am besten selbstständig. Ich schließe daher mit solchen, die ich mir zu Fig. 43 gestellt habe: Wie sieht die Figur aus, die durch Falten *eines* Notizzettels entsteht? Wo steckt der Fehler? Und wie funktioniert’s mit zwei Notizzetteln?

Epilog: Angewandt, abgewandt, zugewandt – Allerhand!

„[Der] Gegensatz von reiner und angewandter Mathematik wurde einmal bei einem Göttinger Mathematikerfest in sehr lustiger Weise als das Thema eines bekanntlich auch wegen seiner Stoffdarstellung umstrittenen Gemäldes, der sogenannten irdischen und himmlischen Liebe, von T i z i a n hingestellt. Da heißt es von dem Bilde […]: Die Frauenfigur links stellt die angewandte Mathematik dar, weil sie ein Gewand an hat; rechts erkennt man die reine Mathematik, weil sie am Brunnen sitzt. In der Hand hält sie den Schwamm, um die Tafel abzuwischen. Hinten sehen wir die angewandte Mechanik, welche im Wasser planscht. Auf dem Brunnen sind die Fortschritte der Technik und des Schulwesens dargestellt: links ein Pferd und ein Automobil (letzteres ist durch das Kleid der angewandten Mathematik verdeckt), rechts die Schulreform: eine Züchtigung.“ (Lietzmann 1922, 46)



Heinrich Winand Winter (1928 – 2017) hat im März 2012 in Köln auf der Tagung „Wo bleibt die Mathematik?“ ein Holzmodell vorgestellt, welches das regelmäßige Sechseck bei passendem ebenen Schnitt durch die Kantenmitten eines Würfels offenbart. Mit diesem Bastelbogen lässt sich dieses Modell nacherleben – und analog ein regelmäßiges Dreieck im Würfel entdecken.

Aber: Bevor sie den Bastelbogen ausschneiden, zeichnen Sie bitte selbst an zusammenfallenden Kanten geeignete Klebelaschen ein – Kopfgeometrie ;-)).