Rundbrief **195**

2/2015

Die MATHEKOFFER

Inhaltsverzeichnis

Impressum

Der MUED-Rundbrief erscheint vier Mal im Jahr in Appelhülsen mit einer Auflage von 800 Exemplaren.

MUED e.V., Bahnhofstr.72, 48301 Appelhülsen
Tel. 02509/606, Fax 02509/996516
e-mail: mued.ev@mued.de, **http://www.mued.de**

Redaktion dieses Rundbriefs: Heinz Böer, Joachim Kamp
Redaktion des nächsten Rundbriefs: Ines Petzschler

Zum Rundbrief

Die Reihe Mathematik zum BeGreifen im Bücherbunt hat sich in den letzten Jahren immer mehr zum Schwerpunkt gemausert: in der Kombination von Material und anregenden Aufgabenstellungen können Schüler/innen Mathematik in umfassenden Sinnzusammenhängen aktiv und individuell entdecken.
Das neue Standbein sind die Mathekoffer: seit der Didacta 2015 sind die Koffer Wahrscheinlichkeit, Geometrie, Brüche und die Tasche zum Zaubern, Knobeln, Spielen auf dem Markt. Zur Didacta 2016 sollen die Koffer Funktionen, Algebra und Dezimalrechnung-Prozente erscheinen. Die ersten vier werden in diesem Rundbrief vorgestellt. Für jeden Koffer gibt es ein Team von Bearbeiter/innen. Jeder Koffer enthält Material im Klassensatz und eine Broschüre mit konkreten Arbeitsblättern, Lösungen und Unterrichtsempfehlungen.

Kosten
Mit diesem Großprojekt stößt die MUED an die Grenzen ihrer Finanzen. Auch deshalb hoffen wir auf große Resonanz in der Kollegenschaft.

Verbreitung
Wir hoffen, dass sich viele an der Verbreitung der Mathekoffer beteiligen. Stellst du als Multiplikator/in den einen oder andern Koffer in deiner Fachschaft vor oder auf regionalen Tagungen in deinem Umfeld?
Das MUED-Büro unterstützt dich.

Neues Layout
Die Broschüren (mit CD in jedem Koffer) sind mit einem neuen, professionellen Layout-Programm hergestellt. Das war und ist eine neue, große Herausforderung für das Büro in Appelhülsen.

Mitarbeit, Korrekturen, Ergänzungen
In der ersten Auflage stellen wir von jedem Koffer 250 Exemplare her, von den Broschüren immer 50er-Auflagen. So können Korrekturen und Ergänzungen leicht einfließen. Beteilige dich mit Kritik und Anregungen.

In der Hoffnung, dass das Koffer-Projekt durch die vielen MUEDen zu einem Erfolg wird

Heinz & Joachim

Eine kurze Geschichte des Mathekoffers

Die Erstausgabe des Mathekoffers erschien zum Jahr der Mathematik (Wissenschaftsjahr 2008). Sie umfasste in einem großen Koffer vier Themenboxen („Funktionaler Zusammenhang“, „Raum und Form“, „Zahlen, Terme, Gleichungen“ und „Zufall und Wahrscheinlichkeit“) und zwei Aufgabenkarteien („Messen, Schätzen, Überschlagen“ und „Zaubern, Spielen, Knobeln“).

Die Initiative für den Mathekoffer, der materialbasiertes und handlungsorientiertes Lernen von Mathematik ermöglicht, hat Hans-Jürgen Elschenbroich vom Deutschen Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e. V. (MNU) ergriffen. Der MNU konnte die Deutsche Telekom Stiftung, die sich bei der Förderung des Jahres der Mathematik intensiv engagiert hat, von der Idee überzeugen.

Andreas Büchter und Hans-Wolfgang Henn wurden als Herausgeber gewonnen und die Verlage Friedrich und Klett entschieden sich dafür, das Produkt gemeinsam herzustellen und zu vertreiben. Auf der Bildungsmesse didacta wurde der Mathekoffer im Frühjahr 2008 der Öffentlichkeit präsentiert. Schnell wurden drei Auflagen des Mathekoffers mit insgesamt 6500 Exemplaren verkauft. Trotz dieses Erfolgs wollten die Verlage den Mathekoffer nicht weiter auflegen.

Die MUED (Mathematik Unterrichts Einheiten Datei) hat bereits einen großen Bereich „Mathematik zum BeGreifen“ (u. a. mit Klickies, MEXBOX, 3D-Koordinatenmodellen und Galtonbrettern) sowie zahlreiche Lernmaterialien für einen handlungsorientierten Mathematikunterricht. Deshalb vereinbarte sie mit den Herausgebern, dass von der MUED eine überarbeitete Neuauflage des Mathekoffers erstellt werden soll.

Entsprechend der typischen Arbeitsweisen der MUED wurden Arbeitsgruppen gegründet, die die einzelnen Themenboxen grundlegend neu bearbeitet und zu eigenständigen Themenkoffern weiterentwickelt haben. Auf der didacta im Frühjahr 2015 wurden nun drei eigenständige Themenkoffer („Brüche“, „Geometrie“, „Wahrscheinlichkeit“) und die Tasche „Zaubern – Spielen – Knobeln“ vorgestellt, im Frühjahr 2016 folgen drei weitere („Algebra“, „Dezimalzahlen und Prozente“, „Funktionen“).

Das didaktische Konzept des Mathekoffers

Mathematische Begriffe sind grundsätzlich theoretischer Natur. Etwa ein Kreis oder eine Zahl existiert in Reinform nur als geistige Schöpfung. Die Abstraktion als wesentliches Merkmal von Mathematik tritt dabei bereits in der Grundschule mit dem Erwerb des Zahlbegriffs in Erscheinung. Der Erwerb des Zahlbegriffs benötigt dabei einerseits Zugänge über Kontexte und bestimmte Darstellungen von Zahlen, z. B. als Anzahlen von Gegenständen, andererseits ist ein Ziel des Mathematikunterrichts, dass Schülerinnen unabhängig von bestimmten Kontexten souverän mit Zahlen umgehen können. Einigen Schülerinnen gelingt dies schneller, andere benötigen dafür mehr Zeit sowie mehrere und ggf. andere Lernumgebungen.
In der Sekundarstufe I werden die mathematischen Begriffe zunehmend abstrakter. Zugleich ist der Unterricht häufig weniger materialbasiert und weniger handlungsorientiert als in der Grundschule. Hieraus resultiert nicht selten eine Überforderung von Schülerinnen, die noch nicht über ausreichend tragfähige Vorstellungen zu den grundlegenden mathematischen Begriffen der Grundschulzeit verfügen. Aber auch leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler können bestimmte Grenzen ihrer Vorstellung – etwa im Bereich Raumgeometrie – materialbasiert einfacher überwinden. Die Nutzung von Material kann die Vorstellung unterstützen oder entlasten, Handlungsorientierung verleiht dem mathematischen Tun häufig Sinn. Genau hier setzt der Mathekoffer mit seinen verschiedenen Themenkoffern an.
In einer Kombination aus Material und anregenden Aufgabenstellungen können Schülerinnen in umfassenden Sinnzusammenhängen Mathematik aktiv und individuell entdecken. Neben der Nutzung von Material und der Handlungsorientierung sind die innere Differenzierung und das Spiralprinzip Leitgedanken bei der Entwicklung der Lernumgebungen gewesen. Die Aufgabenstellungen sind auf verschiedenen Niveaus bearbeitbar. Neben einfachen Zugängen zum Thema gibt es in der Regel Fragestellungen zur Vertiefung. So ermöglichen die Materialkoffer auf breiter Basis den Umgang mit heterogenen Lerngruppen durch vielfältige Möglichkeiten der Ansprache von Schülerinnen in individuellen und kooperativen Lernformen. Die vorhandene Vernetzung von Themen, die in der Schule über mehrere Jahrgangsstufen verteilt sind, bleibt sichtbar, weil einerseits immer wieder bewusst an Vorerfahrungen angeknüpft wird und andererseits erkennbar wird, wie sich die Themen weiterentwickeln.
Praxisbezogene Literatur:
Weiterführende konzeptionelle Überlegungen und unterrichtspraktische Anregungen finden Sie in den Basisartikeln und unterrichtspraktischen Beiträgen der Themenhefte „Mathe real – mit Material“ (mathematik lehren, Heft 176) und „MAT(H)Erial“ (Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 58).

Einführung in den Mathekoffer Wahrscheinlichkeit

Einführung in den Wahrscheinlichkeitsbegriff in den Klassen 6 - 8
Beim ersten Zugang zur Stochastik in den Jahrgangsstufen 6 - 8 geht es darum, den Wahrscheinlichkeitsbegriff fundiert zu erarbeiten. Wird die Gleichverteilung etwa bei Würfeln nicht intuitiv angenommen, so kann man sie durch vielfaches Werfen und Berechnen der relativen Häufigkeit erfahren lassen und ihre Berechnung in der Folge für Laplace-Geräte verallgemeinern.

Manche Zufallssituationen erschließen sich zunächst nicht, da zu ihrer Bearbeitung weitergehende kombinatorische Überlegungen nötig sind. Im ersten Zugang sind sie aber statistisch bearbeitbar.
Für Nicht-Laplace-Zufallsgeräte ist die lange Serie der Zufallsversuche unabdingbar, denn erst auf dieser Basis kann die Wahrscheinlichkeit einigermaßen zuverlässig geschätzt werden. Der auf dem Gesetz der großen Zahl basierende statistische Wahrscheinlichkeitsbegriff ist von seiner Bedeutung für die Untersuchung realer Situationen häufig wichtiger als der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff.

Bearbeitungsstufen und Beispieleliste für die Klassen 6 - 8
a) Laplace-Zufallsversuche
b) komplexere Zufallversuche, die für „Anfänger“ zunächst nicht überblickbar sind
c) Nicht-Laplace-Zufallsversuche

Typ	Seite	Arbeitsblätter
a	10 15 17	Mit welcher Zahl beginne ich? Ein Beutel voller Chips Mit Tetraedern würfeln
b	19 22 26	Im Spielcasino Wenn 2 Würfel fallen Differenz trifft
c	30 32 34	Heftzwecken Ein etwas anderer Würfel Spiel mit der Wahrscheinlichkeit

Zum Arbeitsblatt "Wenn 2 Würfel fallen" gibt es zur Erweiterung II eine Excel-Simulation "2Wuerfel", ebenso zu "Differenz trifft", Erweiterung I die Simulation "Differenz".

Die Abfolge der Arbeitsblätter oben ist zugleich eine Empfehlung für die Abfolge im Unterricht. Allerdings empfiehlt es sich nicht, die Fragestellungen zu b alle drei im Unterricht zu behandeln, da es jedesmal um den Wurf von zwei Würfeln geht, deren Summe bzw. Differenz untersucht wird. Da können Sie auswählen. Die Materialien zu „Auto oder Ziege?“ und „Quaak“, die in Klasse 8 - 10 aufgeführt sind, passen auch schon in die Eingangsreihe, wenn noch Zeit bleibt.

Mehrstufige Zufallsprozesse in den Klassen 8 - 10

Im zweiten Zugang zur Wahrscheinlichkeit in der Sekundarstufe I geht es in den Lehrplänen der Klassen 8 bis 10 um mehrstufige Zufallsprozesse, deren Strukturierung durch Baumdiagramme und um Berechnung entsprechender Wahrscheinlichkeiten.

Bearbeitungsstufen für die Klassen 8 - 10

a) Hier werden die Materialien des Wahrscheinlichkeitskoffers genutzt, um mehrstufige Zufallsprozesse zuerst durch Simulation zu bearbeiten, ehe in einem zweiten Schritt durch die Einführung und Nutzung von Baumdiagrammen auch rechnerische Lösungen erschlossen werden. Die Simulation hilft wieder allen Schülerinnen ein vertieftes Verständnis der Wahrscheinlichkeitsüberlegungen und Rechnungsergebnisse zu gewinnen.
   Für Schülerinnen mit Schwierigkeiten in der mathematischen Strukturierung eines Problems kann die Simulation zudem einen händischen Zugang zur Problembearbeitung bieten – eine Gelegenheit zu differenziertem Arbeiten im Unterricht und zur Integration verschiedener Kompetenzniveaus.
b) Es gibt viele komplexe, stochastische Problemstellungen, die Schülerinnen der Sekundarstufe I verstehen und reizen, die allerdings mit den rechnerischen Mitteln der Sekundarstufe I nicht bearbeitbar sind, mit denen in der Sekundarstufe II allerdings schon. Mit den Materialien des Wahrscheinlichkeitskoffers werden sie – durch Simulation – auch in der Sekundarstufe I bearbeitbar und lösbar.
c) Viele stochastische (Spiel)Situationen sind in ihrer Komplexität prinzipiell nicht zu überblicken, eine rechnerische Bearbeitungsmöglichkeit ist überhaupt nicht in Sicht. Aber die Spiele sind leicht zu verstehen, sie wahrscheinkeitstheoretisch zu durchleuchten ist reizvoll und interessant. Mit den Materialien des Wahrscheinlichkeitskoffers werden sie – als Simulationsaufgabe – bearbeitbar und lösbar.
d) Mit der Monte-Carlo-Methode wird für stochastische Prozesse, deren Ergebnis rechnerisch hergeleitet werden kann, durch Simulation eine gute Annäherung erzielt. Durch Vergleich der beiden Lösungen kann man für eine Größe in der hergeleiteten Lösungsformel einen guten Näherungswert bestimmen. Auch dafür werden die Materialien des Wahrscheinlichkeitskoffers genutzt.

Beispiele-Liste zu den Bearbeitungsstufen für die Klassen 8 – 10

Typ	Sek.I	Excel-Datei	Einführungspha- se S. II	Leistungskurs
a	Fahrscheinkontrolle Tennis-Match Historische Würfel- spiele I Historische Würfel- spiele II Komische Würfel Rote Kugel gewinnt Das Spiel Mei- er/Mäxchen OMA-Spiel I Chuck a luck Crown and Anchor	 Meier.xls Chuckal- uck.xls crown_anchor .xls	Wie Sek. I und - Inflation der Gewinnzahlen - Rote Kugel ge- winnt, Erweite- rung - Urne-Chips- Spiel- Strategie - Geburtstags- problem	Wie EF u. - Thronfolge - OMA-Spiel II - 1 an erster Stelle - paranormale Fähig- keiten
b	Inflation der Ge- winnzahlen Rote-Kugel- Erweiterung Urne-Chips-Spiel- Strategie Geburtstagsprob- lem Thronfolge in Ran- domien Wichtelgeschenke OMA-Spiel II 1 an erster Stelle Paranormale Fä- higkeiten Auto oder Ziege?	Gewinnzah- len.xls Geburtstag I.xls Rando- mien.xls Wichteln.xls Benford.xls Paranor- mal.xls Zie- ge_auto.xls	Wie Sek. I	Wie EF
c	21 verliert Verlust bei Dopp- lung Quaak	21_verliert.xls Dopplung.xls quaak.xls	Wie Sek. I	Wie EF
d	pi-Näherung Buffons Nadel	pi- Naehe- rung.xls Buf- fons_Nadel.xl s	Wie Sek I	Buffons Nadel - Erwei- terung II

Aufgeführt ist, welche Fragestellungen in der Systematik in der Sek I behandelbar sind, welche auch in die Einführungsphase EF der Oberstufe bzw. den Leistungskurs passen. Einige Erweiterungen passen auch nur in die Sekundarstufe II.

In der dritten Spalte sehen Sie, zu welchen Fragestellungen wir zusätzlich Simulationsprogramme geschrieben haben. Die sind auf den Arbeitsblättern an passender Stelle auch erwähnt.

Zu den Arbeitsblättern für die Klassen 8 - 10

Die Arbeitsblätter auf den Seiten 54 bzw. 57/58 liegen in zwei Versionen vor: eine für Schülerinnen, die ihren Arbeitsprozess selbst organisieren und ordentlich dokumentieren können, und eine, in der eine solche Bearbeitungs- und Notationsstruktur vorgegeben ist. Zur Gewöhnung werden vermutlich zunächst mehrere der ausführlich vorgegebenen Anleitungs- und Auswertungsblätter nötig sein, ehe man im Unterricht diese Arbeit von Schülerinnen eigenständig erledigen lässt. Sie können auch beide Versionen zur Differenzierung im Unterricht einsetzen.

Allerdings haben wir diese doppelte Ausführung der Arbeitsblätter nur auf S. 54 und S. 57/58 ausgeführt, sonst haben wir die verkürzte Version aufgeschrieben. Die ausführlichere Arbeitsblattversion können Sie aber mit Hilfe der Dateien auf der beiliegenden CD selber ergänzen.

Nach unseren Erfahrungen reagieren Schülerinnen, die nicht gewohnt sind, eigenständig im Mathematikunterricht zu arbeiten, auch auf ausführliche Fassungen von Arbeitsblättern nicht mit Aktivität, weil ihnen z. B. der Text zu umfangreich ist. In solchen Fällen müssen Sie als Lehrerin oder Lehrer die Anfangsstrukturierung der Simulation in die Hand nehmen, das Blatt wird zu einem reinen Auswerteblatt. Auch in diesem Fall können Sie das vorliegende Arbeitsblatt auf der CD passend für Ihre Schülerinnen abändern.

Mögliche Unterrichtsabfolgen

Die Einteilung in die Kategorien a bis d beruht auf der systematischen Einteilung der Fragestellungen bzw. Arbeitsblätter nach ihrer Bearbeitungsmöglichkeit. Die Abfolge im Unterricht sieht eher so aus:

- Schon in der Klasse 6 – 8 oder irgendwo in der Klasse 8 – 10, wo es passt:
  - S. 36: Auto oder Ziege?
  - S. 38: Quaak
- Zu Beginn einer Unterrichtsreihe zu mehrstufigen Zufallsprozessen in Klasse 8, 9 oder 10
  - S. 41: Fahrscheinkontrolle
  - S. 45: Das Spiel Meier oder Mäxchen (zu kombinatorischen Fragen)
  - S. 49: OMA-Spiel (zu kombinatorischen Fragen)
- Am Ende der Unterrichtsreihe zu mehrstufigen Zufallsprozessen in Klasse 8, 9 oder 10
  - S. 54: Komische Würfel

- S. 61: Historische Würfel
- S. 65: Rote Kugel gewinnt
- S. 68: Tennis-Match
- S. 71: Inflation der Gewinnzahlen
- S. 73: Urne-Chips-Spiel-Strategie
- S. 77: Geburtstagsproblem

- Nur statistisch bearbeitbar, aber wegen der Komplexität am Ende der Sekundarstufe I
  - S. 81:Thronfolge in Randomien
  - S. 84: Wichtelgeschenke
  - S. 86: Die 1 steht gern an erster Stelle…
  - S. 90: Paranormale Fähigkeiten (mit einem Blick auf die Binomialverteilung und das Testen)
- Am Ende der Sekundarstufe I (zur Einführung des statistisch ermittelten Erwartungswertes) oder Beginn der Sekundarstufe II (zur Berechnung des Erwartungswertes)
  - S. 92: Chuck a luck
  - S. 96: Crown and anchor
  - S. 99: 21 verliert
  - S. 102: Verlust bei Dopplung
- Am Ende der Sekundarstufe I nach Einführung der Kreisfläche bzw. des π-Wertes
  - S. 106: Pi-Näherung durch Zufallsregen
  - S. 108: Buffons Nadel

Die Lerndominos (S. 112) passen irgendwo, sobald Baumdiagramme eingeführt sind.

Die Fragestellungen bzw. Arbeitsblätter können Sie nicht alle im Unterricht bearbeiten lassen. Aber aus den jeweils beieinander stehenden Fragestellungen können Sie geeignet auswählen. Die hier aufgeführte Abfolge steht auch so im Inhaltsverzeichnis.

Die Urne-Chip-Strategie (s. 73) passt an der Stelle oben wegen der Erweiterung I. Mit der Erweiterung II ist die Fragestellung gut geeignet zur Motivation des Erwartungswertes ab S. 92.

Simulationen

In Kernlehrplänen (z. B. für die Einführungsphase in NRW) wird explizit gefordert, dass Zufallsexperimente simuliert werden. Ein gesichertes Verständnis von Wahrscheinlichkeitsaussagen gewinnen Schülerinnen erst, wenn sie tatsächlich einen Zufallsversuch sehr häufig ausführen bzw. ihn adäquat simulieren, wenn der Versuch im Unterricht selber nicht ausgeführt werden kann. Erst das Gesetz der großen Zahl erlaubt eine ange-

messene Interpretation von relativen Häufigkeiten im Hinblick auf Wahrscheinlichkeitsaussagen.
Deshalb haben wir mit den Materialien des Wahrscheinlichkeitskoffers diesen Schwerpunkt des Stochastikunterrichts betont.

Die Simulationsprogramme

Aufgrund kleinerer Zahlen von Versuchsdurchführungen lassen sich Ergebnisse schätzen, aber einigermaßen gesichert werden sie nur durch lange Versuchsreihen.

Für eine große Zahl von Versuchsdurchführungen braucht man die ganze Klasse und viel Zeit. Soviel Zeit und Aufwand will man nicht immer investieren. Deshalb haben wir für fast alle angebotenen Problemstellungen Excel-Programme geschrieben, die Sie zur vielfachen Simulation verwenden können. Ist eine Problemstellung erfasst und der entsprechende Zufallsversuch mehrmals durchgeführt worden, sind erste grobe Schätzungen zu den interessierenden Wahrscheinlichkeiten möglich. Danach können die Schülerinnen mit dem Excel-Programm eine große Zahl von Simulationen durchführen, um auf gesichertere Ergebnisse zu kommen.

Wurde ein Zufallsexperiment von der ganzen Klasse schon sehr häufig durchgeführt, so kann das (einigermaßen gesicherte) Ergebnis durch die Excel-Simulation bestätigt werden. Kleinere Abweichungen geben zudem Anlass über die Zuverlässigkeit bzw. noch vorhandene Schwankungsbreite der Ergebnisschätzungen zu reflektieren. Dies kann auch dazu führen, dass leistungsstärkere Schülerinnen sich Gedanken zu wahrscheinlichkeitstheoretischen Begründungen machen.
Wenn sich eine Situation nicht durch ein geeignetes Baumdiagramm oder eine Aufzählung der möglichen und der interessierenden Ergebnisse beschreiben lässt, dann sind Simulationen die einzige Möglichkeit, um z. B. verschiedene Strategien bei Spielen wie Quaak, 21 verliert, Verlust bei Dopplung zu vergleichen.

Simulationsprogramme als eigenständiges Thema

In einem Wahlpflichtkurs II (Klasse 8/9 bzw. 9/10) können Sie die Simulation stochastischer Fragestellungen mit Excel eigens zum Thema machen. Dort können Schülerinnen lernen, solche Programme selber zu schreiben. Sollten solche Programme aus dem WPII-Unterricht vorliegen, können die Autorinnen diese im Stochastikunterricht ihrer Klasse jeweils an den benötigten Stellen selber vorstellen und vorführen.
Ansonsten können Sie den Schülerinnen vor der Benutzung von Excel-Programmen kurz das Prinzip des Programms erklären, damit glaubhaft wird, dass tatsächlich die infrage stehende Problemstellung zuverlässig simuliert wird. Eine eigenständige Programmierung durch die Schülerinnen würde den Zeitrahmen des normalen Mathematikunterrichts sprengen.

Technische Voraussetzungen
Die Excel-Simulationen sind sowohl für Excel97_2003 (Endung *.xls) und auch für Excel2010 (Endung *.xlsx) vorhanden.
Alle Beispiele sind so programmiert, dass durch Setzen und Entfernen des Häkchens im Entscheidungsfeld ein kompletter Neustart erfolgen kann, weil damit alle Zähler etc. auf Null gesetzt werden. Für die Zähler müssen Iterationen (also Bezüge einer Zelle auf sich selbst) zugelassen werden. Zur Vorbereitung sollten Sie als Lehrperson die folgenden Einstellungen vornehmen (lassen):

1. Excel bis 2003
Unter Extras → Optionen → Berechnungen müssen Iterationen zugelassen (Häkchen) und die max. Iterationszahl auf 1 gesetzt werden.

2. Excel ab 2007
Unter Start → Optionen → Formeln müssen Iterationen zugelassen (Häkchen) und die max. Iterationszahl auf 1 gesetzt werden.

Auf der beiliegenden CD sind die vorhandenen Simulationsdateien verfügbar, in der Beispieleliste zu den Klassen 8 – 10 oben sind sie aufgeführt.

Fehler
Sollten Sie Druckfehler oder inhaltliche Fehler finden, informieren Sie uns bitte unter mued.ev.@t-online.de. Wir korrigieren sie in der nächsten Auflage.

Unsere Schülerinnen haben sich in der Regel gerne auf diese Lernangebote eingelassen. Wir wünschen Ihnen ähnliche Erfahrungen in Ihren Klassen.

Bei der Ansprache von Jungen und Mädchen sowie Lehrern und Lehrerinnen, die sich mit unserem Mathekoffer beschäftigen, haben wir uns häufig für die Verwendung der weiblichen Form, manchmal auch für die männliche entschieden. Damit sind natürlich immer sowohl die weiblichen als auch die männlichen Lernenden und Lehrenden gemeint.

Inhaltsverzeichnis Mathekoffer Wahrscheinlichkeit

Materialliste Mathekoffer Wahrscheinlichkeit

Kunststoffkoffer farbig bedruckt

Broschüre ca. 100 Seiten mit CD

100 Würfel weiß
50 Würfel gelb
15 Tetraederwürfel
15 Holzquaderwürfel
15 Holz-Zylinderwürfel
16 Knobelbecher

100 Spielchips 2-farbig
300 Spielchips in 3 Farben
100 Heftzwecken,
100 Zahnstocher
200 Klebepunkte
1 Klassensatz Lerndominos

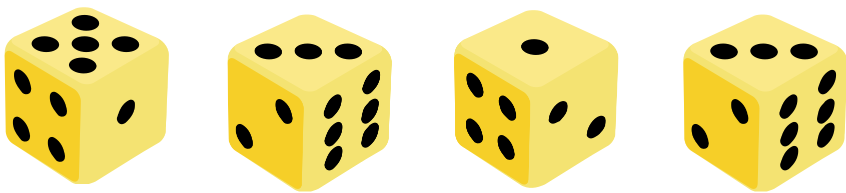
Inflation der Gewinnzahlen

Fragestellung

Im Zweier-Spiel würfelt der Erste und gewinnt, falls eine 6 fällt. Der Zweite gewinnt, falls eine 6 oder die erste gewürfelte Zahl fällt. Der erste Spieler würfelt wieder und gewinnt, wenn eine 6 oder eine der beiden bereits gewürfelten Zahlen fällt; usw. Nach einem Sieg endet das Spiel jeweils; es dauert also maximal 6 Würfe lang.
Ist es günstiger, als Erste oder als Zweite zu würfeln?

Spielerin 1 **Spielerin 2** **Spielerin 1** **Spielerin 2**

Beispiel:



Spielerin 2 gewinnt, da die 3 seit dem 2. Wurf Gewinnzahl ist.

Material

2 normale 6er-Würfel

Bearbeitung

- Dieses Arbeitsblatt bearbeitest du mit einer Partnerin.
- Spielt das Spiel einige Male. Schreibt eine Vermutung zu der Fragestellung auf.
- Um die Vermutung zu prüfen, wird 50-mal gespielt; jedes Mal beginnt dieselbe Spielerin. Beide Spielerinnen notieren die Zahl ihrer Siege. Zum Schluss wird entschieden, wie die Fragestellung zu beantworten ist.
- Sammelt alle Zweier-Ergebnisse aus der Klasse, addiert die Zahl der Spiele und die Zahl der Siege für die, die zuerst würfelt.
- Entscheidet neu, wie die Fragestellung zu beantworten ist.

Erweiterung I

Simuliert das Spiel mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms, z. B. mit dem beiliegenden Excel-Programm „Gewinnzahlen“. Entscheidet nach etwa 2000 Spiele-Simulationen, wie die Fragestellung zu beantworten ist.

Erweiterung II

Schreibt ein passendes Baumdiagramm zum Spiel auf und berechnet die Wahrscheinlichkeit für den Sieg des ersten Spielers.

Inflation der Gewinnzahlen

Kompetenzen

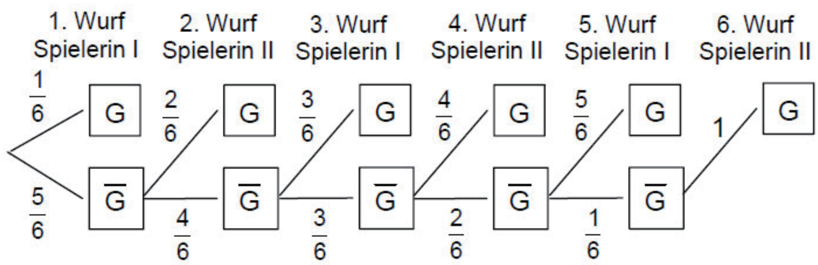
- Argumentieren, Problemlösen;
- statistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Baumdiagramm (Erweiterung)

Möglicher Unterrichtseinsatz/Differenzierung
Das 6-stufige Baumdiagramm ist für die Sekundarstufe I eine große Herausforderung. Da es nicht groß aufgebläht ist, könnte eine Expertengruppe die Baumdiagrammlösung vorstellen. Sonst passt das Baumdiagramm (Erweiterung II) eher in die Einführungsphase der Oberstufe. Bleibt man auf der Ebene der Simulation, so ist es auch in der Sekundarstufe I bearbeitbar. Allerdings sollte möglichst die PC-Simulation (Erweiterung I) gemacht werden, um zu zuverlässigen Antworten zu kommen, denn das Ergebnis 52,2 % für die beginnende Spielerin liegt nur knapp über der 50 %-Entscheidungsgrenze.

Zur Erweiterung I: Inflation der Gewinnzahlen
Ergebnis nach rund 3000 Simulationen:
53 % für den Sieg des Ersten; 47 % für den des Zweiten.

Damit ist klar, dass der Anfänger bei diesem Spiel leicht bessere Gewinnchancen als der Zweite hat.

Zur Erweiterung II: Baumdiagramm
Sind die Schülerinnen den Umgang mit mehrstufigen Baumdiagrammen gewohnt, lässt sich die Wahrscheinlichkeit berechnen:



P(Gewinn für Spielerin I) = $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{169}{324} \approx 52{,}2\,\%$

P(Gewinn für Spielerin II) = $\frac{155}{324}$ $\approx 47{,}8\,\%$; die Anfangende ist leicht im Vorteil.

Einführung in den Mathekoffer Geometrie

Dem grundsätzlichen didaktischen Konzept des Mathekoffers (vgl. Seite 5) folgend sollen geometrische Objekte und Zusammenhänge durch greifbare Gegenstände repräsentiert bzw. realisiert werden, um so den Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen zu diesen Inhalten zu unterstützen. Verschiedene Arten von Materialien ermöglichen den handlungsorientierten Zugang zu den Aufgaben.

Materialangebot im Mathekoffer Geometrie
Bei der Materialauswahl für den Mathekoffer wurden vor allem zwei Grundsätze berücksichtigt:

- Das Material sollte möglichst universell einsetzbar sein, d. h. mit einer bestimmten Sorte von Material sollten möglichst viele Lerninhalte abzudecken sein, und
- es sollte im Mathekoffer von jedem Material so viel vorhanden sein, dass eine gesamte Schulklasse gleichzeitig an einer Aufgabe arbeiten kann.

Da das aktiv-entdeckende Lernen im Fokus des Mathekoffers steht, muss das Material außerdem ausreichend Spielraum für die Kreativität der Schülerinnen bieten, sodass während der Bearbeitung der Aufgaben individuelle Zugänge möglich sind und an unterschiedliche Vorstellungen und Kompetenzen angeschlossen werden kann.
Unter Berücksichtigung dieser Aspekte enthält der Mathekoffer Geometrie 400 Steckwürfel, 15 Spiegel und einen umfangreichen Klassensatz ebener Figuren, der aus 405 Dreiecken und Vierecken besteht.

Inhaltliche Schwerpunkte im Mathekoffer Geometrie
Der Mathekoffer Geometrie umfasst drei Themenschwerpunkte und drei motivierende Spiele:

A. Spiegelung, Drehung, Verschiebung – hier werden insbesondere die Achsenspieglung und die Punktspiegelung mithilfe von Steckwürfelfiguren, Spiegeln, Schnitt- und Lochmustern in Papier und zusammengesetzten ebenen Figuren erarbeitet.
B. Ebene Figuren – die Schülerinnen setzen sich hier intensiv mit ebenen Figuren, vor allem mit Dreiecken und Vierecken auseinander. Dabei bilden sie elementare Begriffe, sie entdecken und begründen erste Zusammenhänge. Auf dieser Grundlage kann in späteren Unterrichtsreihen und Jahrgängen die euklidische Geometrie vertieft werden.
C. Räumliche Figuren – die räumliche Geometrie ist nicht weniger wichtig als die ebene Geometrie, schließlich bewegen wir uns alle im dreidimensionalen Raum. In der Schule kommt die Raumgeometrie aber manchmal etwas zu kurz. Mit diesem Themenschwerpunkt sollen vor allem die Raumvorstellung gefördert und tragfähige Vorstellungen für

Volumenberechnungen und zu Schrägbildern und Netzen von Körpern entwickelt werden.

D. Darüber hinaus stehen drei attraktive und motivierende Geometrie-Spiele zur Verfügung, die unterschiedlich komplex sind und zum spielerischen Wiederholen und Vertiefen der Lerninhalte dienen.

Materialliste Mathekoffer Geometrie

Kunststoffkoffer farbig bedruckt

Broschüre ca. 80 Seiten mit CD

405 Geoformen aus Kunststoff:
60 Dreiecke (rechtwinklig gleichschenklig) (30 x 42,4 x 30 mm)
60 Dreiecke (rechtwinklig gleichschenklig) (42,2 x 60 x 42,2 mm)
60 Dreiecke (rechtwinklig) (30 x 52 x 60 mm)
30 Dreiecke (gleichseitig) (60 x 60 x 60 mm)
30 Dreiecke (rechtwinklig gleichschenklig) (60 x 84,9 x 60 mm)
30 Dreiecke (36,3 x 60 x 39,8 mm)
30 Dreiecke (gleichschenklig) (34,6 x 60 x 34,6 mm)
30 Dreiecke (gleichschenklig) (60 x 97 x 60 mm)
30 Dreiecke (gleichschenklig) (97 x 60 x 97 mm)
15 Parallelogramme (30 x 42,4 x 30 mm)
15 Vierecke (regelmäßig) 60 mm (Winkel: 90°)
15 Vierecke (regelmäßig) 30 mm (Winkel: 90°)

12 Kunststoffbeutel zum Sortieren der verschiedenen Geoformen

400 Steckwürfel in 5 Farben
15 Spiegel

Inhaltsverzeichnis Mathekoffer Geometrie

Hinweise zu den Spielen 4 x 4, Fang den Vierling und GeoZock

Die folgenden drei Spiele eignen sich sehr gut für den Geometrieunterricht in der Sekundarstufe I. Beim Spielen werden Spiegelungen, Drehungen und Verschiebungen zum Bewegen von Figuren genutzt. Dabei wird das Verständnis für diese Kongruenzabbildungen vertieft und die Raumvorstellung geschult. Da die Spiele unterschiedlich komplex sind, können sie in unterschiedlichen Jahrgangsstufen oder auch gut zur Differenzierung eingesetzt werden.

1. 4 x 4

Anzahl und Zusammensetzung der Spieler
4 x 4 ist so konzipiert, dass zwei Einzelspielerinnen oder zwei Paare gegeneinander spielen können.

Fachliche Voraussetzung
Die Spielfiguren werden durch Achsenspiegelungen auf dem Spielfeld bewegt. Daher ist es notwendig, dass die Schülerinnen eine Vorstellung davon haben, was beim Spiegeln an einer Achse geschieht. Da die Spielfiguren aus Steckwürfeltürmen bestehen, ist die Durchführung der Spieglungen vergleichsweise einfach. 4 x 4 eignet sich für Schülerinnen ab der 5. Klasse.

Einbindung in den Unterricht
4 x 4 kann in der frühen Phase einer Unterrichtsreihe über Achsenspieglungen als spielerische Übung eingesetzt werden. Außerdem bietet sich das Spiel für den Einsatz bei einem Stationenlernen oder in der Freiarbeit an. Darüber hinaus sind viele weitere Einsatzmöglichkeiten denkbar.

Differenzierung/Variationen
Im Rahmen einer Differenzierung können andere Zusammenstellungen von Steckwürfeltürmen verlangt werden statt vier 4er-Türme.

2. Fang den Vierling

Anzahl und Zusammensetzung der Spieler
Fang den Vierling ist so konzipiert, dass zwei Einzelspielerinnen oder zwei Paare gegeneinander spielen können. Aufgrund der gegenüber dem Spiel 4 x 4 höheren Komplexität empfiehlt sich jedoch, dass Paare gegeneinander spielen.

Fachliche Voraussetzung
Im Wesentlichen besteht der fachliche Inhalt des Spiels im Spiegeln ebener Figuren an einer Spiegelachse. Die Figuren bewegen sich innerhalb eines Kästchenrasters, daher gibt es waagerecht, senkrecht und diagonal angeordnete Spiegelachsen. Es wird vorausgesetzt, dass die Schülerinnen eine Vorstellung von Quadratvierlingen haben. Fang den Vierling eignet sich für Schülerinnen ab der 6. Klasse.

Einbindung in den Unterricht
Das Spiel eignet sich besonders gut im Anschluss an die Aufgabe 8 bzw. an Themengebiete mit Achsenspieglungen.

Differenzierung/Variationen
Die Spieglung an den diagonalen Spiegelachsen fällt Schülerinnen vergleichsweise schwerer als an den zum Kästchenraster parallel angeordneten Spiegelachsen. Es hat sich bewährt, bei Spieglungen an den diagonalen Achsen Figuren zur Hilfe zu nehmen (zusätzliche „Dummys", die nicht auf dem Spielfeld stehen), die die Schülerinnen an die Stelle auf dem Spielfeld stellen, wo sie das Spiegelbild vermuten und im Anschluss an den Spielzug wieder vom Spielfeld nehmen. Im Rahmen der Differenzierung können die Vierlinge beliebig variiert werden. So können etwa nur die quadratförmigen Vierlinge zugelassen werden. Dann fällt das Spiegeln wesentlich leichter.

3. GeoZock

Anzahl und Zusammensetzung der Spieler
Aufgrund der Komplexität des Spiels ist es sinnvoll, Paare gegeneinander spielen zu lassen.

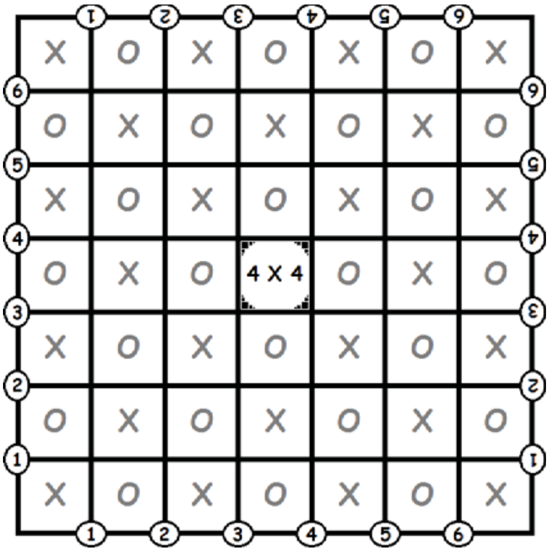
Fachliche Voraussetzung
Die Schülerinnen sollten mit beliebigen Figuren Achsenspieglungen, Drehungen, Punktspieglungen und Verschiebungen durchführen können. Es empfiehlt sich, die Schülerinnen zuerst mit „Fang den Vierling" vertraut zu machen, da die Spielfelder sehr ähnlich sind. Die Spiegelachsen sind sogar identisch. GeoZock kann, wenn man von den mathematischen Inhalten ausgeht, ab der 8. Klasse gespielt werden.

Einbindung in den Unterricht
Das Spiel kann gut zur Wiederholung und Vertiefung von Kongruenzabbildungen genutzt werden. Wenn die Schülerinnen sicher im Umgang mit dem Spiel sind, können sie die Spielregeln selbstständig ändern. Dabei können die Schülerinnen sehr kreativ werden und gute Ideen entwickeln. Der MUED-Verlag nimmt gerne bewährte Ideen von Schülerinnen, Schülern, Lehrerinnen und Lehrern an. (mued@mued.de)

Differenzierung/Variationen
Im Rahmen einer Differenzierung können die GeoZock Karten für die Drehung aus dem Spiel genommen und stattdessen durch andere Abbildungskarten ersetzt werden, damit die Kartenanzahl gleich bleibt. Dies vereinfacht das Spiel erheblich.

D. Geometrie-Spiele

4 x 4 Spielregeln

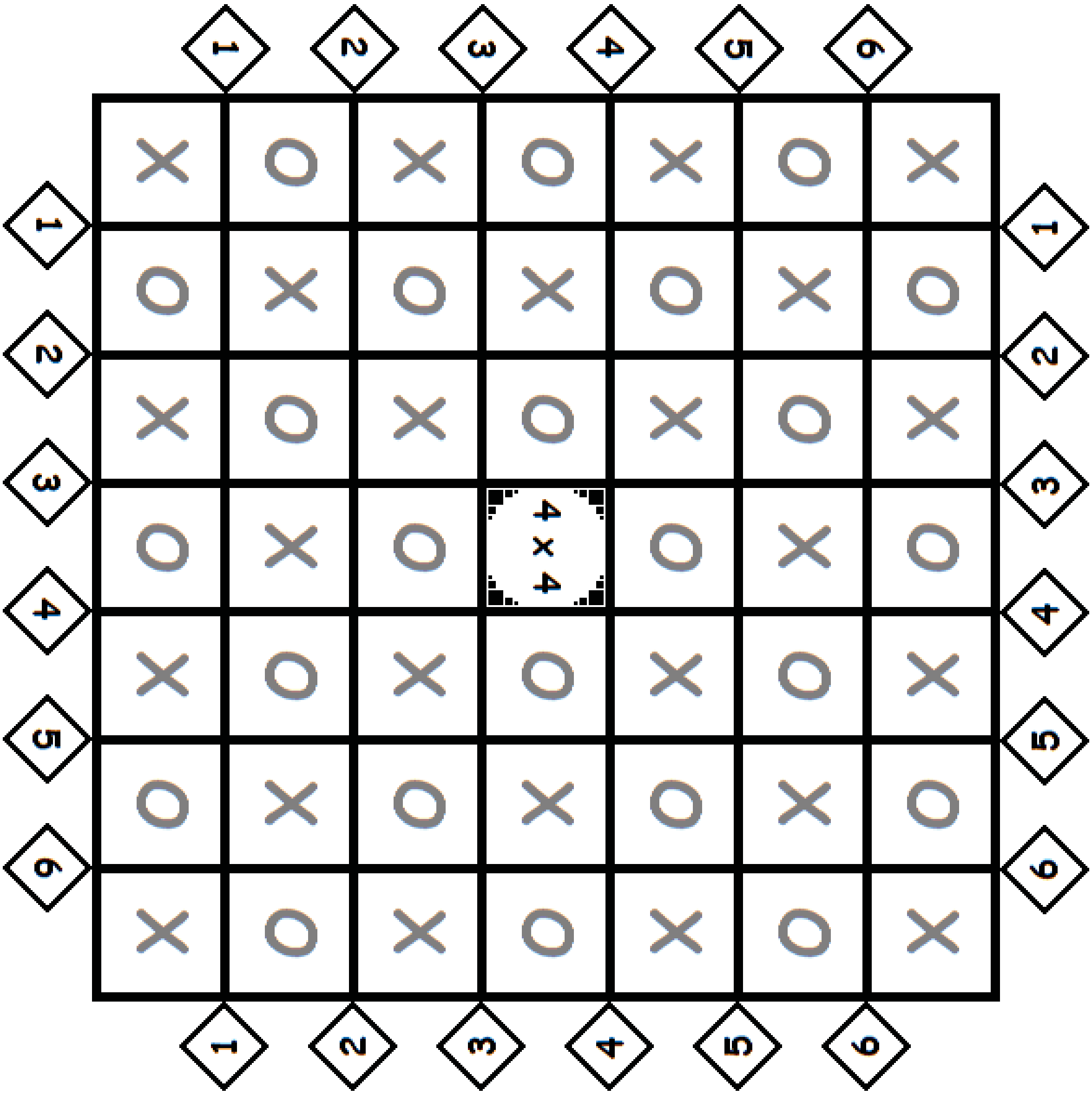


Was ihr benötigt:
- Einen Gegenspieler
- 48 Steckwürfel
  (in zwei verschiedenen Farben, von jeder Farbe 24 Stück)
- Ein Spielfeld
- Einen Würfel

Spielfeld und Aufbau:
Das Spielfeld besteht aus 7 x 7 quadratischen Feldern und insgesamt 12 Spiegelachsen, von denen 6 senkrecht und 6 waagerecht angeordnet sind. Die Spiegelachsen sind jeweils mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert.
Jeder Spieler benötigt 24 Steckwürfel in seiner gewählten Farbe.
Wer die höhere Zahl würfelt, der bekommt die X-Felder (siehe Spielplan) und muss seine 24 Steckwürfel entsprechend auf dem Spielfeld aufstellen. Der andere Spieler bekommt die O-Felder und muss seine 24 Steckwürfel ebenfalls aufstellen.

Spielverlauf:
Durch Aufeinanderstapeln der Steckwürfel müssen Türme gebaut werden. Die Spieler sind abwechselnd am Zug.
- In jedem Zug würfelt der Spieler zunächst eine Zahl zwischen 1 und 6. Dann wählt er eine der beiden Spiegelachsen (senkrecht oder waagerecht) mit der Zahl aus.
- Nun bestimmt er einen seiner Steckwürfel oder Türme, der dann an der ausgewählten Achse gespiegelt wird.
- Der Steckwürfel oder Turm darf auf einem leeren Feld, einem eigenen Steckwürfel oder Turm oder einem Steckwürfel oder Turm des Gegners landen. Dabei darf kein Turm aus mehr als vier Steckwürfeln entstehen.
- Ein Steckwürfelturm gehört immer dem Spieler, der mit seinem Steckwürfel ganz oben auf dem Turm steht.
- Sobald ein Turm aus vier Steckwürfeln besteht, darf dieser Turm das Spielfeld verlassen.
- Der Turm gehört dann dem Spieler, dessen Steckwürfel ganz oben auf dem Turm steht.

Ziel und Ende:
Gewonnen hat der Spieler, der zuerst vier 4er-Türme hat.
Wurden alle Steckwürfel so aufeinandergestapelt, dass es unmöglich ist weitere 4er-Türme zu erzeugen und hat bis dahin kein Spieler vier 4er-Türme, so endet das Spiel mit unentschieden.


1
2
3
4
5
6
4 x 4

Einführung in den Mathekoffer Brüche

Der Mathekoffer „Brüche“ will vor allem bei der Begriffsbildung am Anfang der Bruchrechnung Unterstützung anbieten. Die didaktische Forschung hat deutlich gezeigt, dass diese erste Auseinandersetzung für Schülerinnen und Schüler oft recht schwierig ist. Deshalb ist es sinnvoll sich bei der Einführung Zeit zu lassen und möglichst oft materialunterstützt zu arbeiten. Das zahlt sich erfahrungsgemäß später deutlich aus.

Der Koffer bietet aber auch für den weiteren Verlauf der Bruchrechnung Material an: Zum Erweitern und Kürzen und für das Rechnen mit Brüchen. Dem Koffer liegt eine weitere Broschüre („Gerechtes Teilen“) bei. In ihr finden sich viele Arbeitsblätter und Kommentare zur Einführung des Bruchbegriffs , die wissenschaftlich begleitet entwickelt und vielfach erprobt wurden. „Gerechtes Teilen“ und die im Folgenden angebotenen Materialien ergänzen sich gut.

Titel	Mathematisches Thema	Material
Mit Geobrettern arbeiten	Brüche darstellen	6 Geobretter, Gummibänder, Arbeitskarten
Perlen auf Stäben	Brüche darstellen Brüche vergleichen	300 Perlen in 3 Farben Schaschlikspieße, Arbeitskarten
Bruchteile aus Sand	Brüche darstellen	
Brüche falten	Brüche darstellen Erweitern/Kürzen	Papier, rechteckig Papier, Streifen
Brüche auf der Wäscheleine	Brüche ordnen	Reepschnur, Bruchkarten (verschiedene Sätze)
Bruchstreifen: Vergleichen	Brüche vergleichen	
Kartenspiel „Schummeln“	Brüche vergleichen	Spielkarten
Plakat „Welcher Bruch ist größer?“	Brüche vergleichen	Plakat
Bruchteile schätzen	Bruchteile schätzen	Kopiervorlage
Spiel „Vier gewinnt“	Erweitern / Kürzen	Spielpläne 300 Chips in 2 Farben

Kartenspiel „Wer ist am nächsten dran?“	Brüche addieren	Spielkarten
Bruchstreifen: Addieren und subtrahieren	Brüche addieren / subtrahieren	Kopiervorlage „Brüche addieren“
Bruchdomino „Multiplikation“	Brüche multiplizieren	Vorlage „Domino“
Lege 12	Grundrechenarten Bruchrechnung	
Gerechtes Teilen	Einführung in den Bruchbegriff	Heft „Gerechtes Teilen“

Inhaltsverzeichnis Mathekoffer Brüche

Materialliste Mathekoffer Brüche

Titel	math. Thema	Material
Mit Geobrettern arbeiten	Brüche darstellen	6 Geobretter, Gummibänder, Arbeitskarten
Perlen auf Stäben	Brüche darstellen Brüche vergleichen	300 Perlen in 3 Farben Schaschlikspieße, Arbeitskarten
Bruchteile aus Sand	Brüche darstellen	
Brüche falten	Brüche darstellen Erweitern/Kürzen	Papier, rechteckig Papier, Streifen
Brüche auf der Wäscheleine	Brüche ordnen	3 m Reepschnur gelb Bruchkarten (verschiedene Sätze)
Bruchstreifen	Brüche vergleichen	
Kartenspiel „Schummeln"	Brüche vergleichen	3 Sets Spielkarten
Plakat welcher Bruch ist größer?	Brüche vergleichen	Plakat A2
Bruchteile schätzen	Bruchteile schätzen	Kopiervorlage
Spiel „Vier gewinnt"	Erweitern/Kürzen	10 Spielpläne 2 Farben, 300 Chips in 2 Farben
Kartenspiel „Wer ist am nächsten dran?“	Brüche addieren	3 Sets Spielkarten
Bruchstreifen: addieren und subtrahieren	Brüche addieren/subtrahieren	Kopiervorlage „Brüche addieren“
Bruchdomino „Multiplikation“	Brüche multiplizieren	30„Domino“ Bögen zur Vorlage
Lege 12	Grundrechenarten Bruchrechnung	
Broschüre „Gerechtes Teilen“	Einführung in den Bruchbegriff	Broschüre 50 Seiten
Broschüre Mathekoffer	Lehrerinfos Arbeitsblätter	Broschüre 50 Seiten

Bruchteile aus Sand

1 Unterrichtsstunde

Kompetenzen

- inhaltlich: Brüche herstellen und benennen
- prozessbezogen: Argumentieren, Kommunizieren

Material

pro Gruppe: 5 gleich große Gläser, Vogelsand, Filzstift (permanent) Es werden zylindrische Gläser benötigt. Plastikbecher o. ä. eignen sich wegen der konischen Form nicht. Man kann z. B. alte Marmeladengläser oder Gläser für Babynahrung verwenden. Hierzu lässt sich u. U. eine Sammelaktion im Kollegium und in der Klasse durchführen. Die Gläser einer Gruppe müssen jeweils exakt gleich sein, es können aber durchaus unterschiedliche Gläserformen in der Klasse verwendet werden (s. Foto).
Vogelsand ist preiswert in Zoohandlungen erhältlich.
Manche Sorten haben kleinere Klumpen. Dann empfiehlt es sich, den Sand vor der Verwendung zu sieben (das kann im Klassenraum durch die Schülerinnen geschehen).

Möglicher Unterrichtseinsatz/Differenzierung

Bruchteile sollen in Marmeladengläsern mit Sand hergestellt werden. Zunächst muss jede Gruppe bei ihrem Glas eine Markierung für das Ganze anbringen. Dazu kann das Glas ruhig mit Sand gefüllt werden (s. Foto auf dem AB). Das unterstützt das Denken in Anteilen bei den folgenden Aufgaben.

Als erste Übung können Halbe hergestellt und beschriftet werden.

Anschließend sollen Fünftel entstehen. In vielen Gruppen wird einfach der Sand, der das Ganze darstellt, in vier weitere Gläser verteilt und darauf geachtet, dass die Füllhöhe überall gleich ist. In der Aufgabe 2 soll nun ohne die Hilfe des Sandes jeweils eine Markierung für die weiteren Fünftel angebracht werden. Die verwendete Strategie soll beschrieben werden. Dieser Abstraktionsschritt soll die Proportionalität der Einteilung in den Fokus rücken. Anschließend kann zur Überprüfung nach und nach aus den anderen Gläsern jeweils ein Fünftel Sand in das markierte Glas geschüttet werden.

Die nächste Aufgabe befasst sich Vierteln und Dritteln.
Vertiefend lässt sich dann die fortgesetzte Halbierung betrachten. Die neu entstandenen Brüche werden benannt und das Bildungsgesetz herausgearbeitet. Sechzehntel lassen sich schon nicht mehr real herstellen. Das ist nicht problematisch, da vorher sicher schon der Algorithmus erkannt wurde.

In der letzten Aufgabe wird thematisiert, das unterschiedliche Ganze auch unterschiedliche Füllhöhen für beispielsweise ein Viertel ergeben.

Bruchteile durch Umfüllen herstellen

Material
5 gleich große Gläser; Vogelsand; Filzstift (wasserfest)

1.
- Fülle ein Glas ungefähr so weit mit Sand wie auf dem Foto.
- Markiere das Ganze.
- Stelle durch Umfüllen Halbe her. Markiere ein Halbes mit dem Filzstift.

2.
- Fülle ein Glas ungefähr so weit mit Sand wie auf dem Foto.
- Markiere das Ganze.
- Stelle durch Umfüllen ein Fünftel her. Markiere ein Fünftel mit dem Filzstift.
- Bringe jetzt auch Markierungen für $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{5}$ an, ohne weiteren Sand ein zufüllen.

3.
- Fülle ein Glas ungefähr so weit mit Sand wie auf dem Foto.
- Stelle 1 Viertel, 2 Viertel, 3 Viertel her. Beschreibe, wie du das gemacht hast.
- Mache das ebenso für Drittel.
- Markiere die Bruchteile mit Filzstift.

4.
- Fülle ein Glas ungefähr so weit mit Sand wie auf dem Foto.
- Stelle ein Halbes her. Halbiere das Halbe. Welcher Bruchteil entsteht?
- Halbiere noch einmal. Welcher Bruchteil entsteht jetzt?

5.
- Vergleicht eure Füllhöhen für Viertel mit denen anderer Gruppen.
- Was fällt euch auf? Warum ist das so?

Einführung "Gerechtes Teilen"

Damit die Bruchrechnung nicht zum Frust wird ...

Zeit lassen

Der Übergang von den natürlichen zu den rationalen Zahlen ist ein schwieriger Prozess. Es kommt nicht einfach neues Wissen hinzu. Die Kinder müssen alles, was sie bis dahin über Zahlen und Rechenoperationen gelernt haben, neu durchdenken, sie müssen alte Vorstellungen relativieren und in einen neuen Zusammenhang integrieren. Sie brauchen deshalb Zeit, um Erfahrungen zu sammeln und zu ordnen, um Irrwege zu durchlaufen und sie als solche zu erkennen. Diese Arbeit müssen sie selbst leisten. Kein Wegräumen von Stolpersteinen, keine von außen kommende Erklärung, wie etwas richtig zu verstehen sei, kann diesen Lernprozess abkürzen. Nimmt man sich in der Einführungsphase Zeit, so spart man sie später wieder ein, wenn man auf eine vielseitige mit unterschiedlichsten Bildern und Handlungen verknüpfte Bruchvorstellung zurückgreifen kann.

Realitätsnahe Situationen anbieten

Zur Fundierung des Bruchbegriffs soll von realitätsnahen Situationen ausgegangen werden, in denen Brüche notwendig oder zumindest hilfreich für die Problemlösung sind. Die Situationen sollten so variiert werden, dass die Kinder in ihnen möglichst viele verschiedene Aspekte des Bruchbegriffs kennenlernen können. Die Konkretisierung sollte so erfolgen, dass die Alltagserfahrungen der Kinder für eine selbstständige Auseinandersetzung ausreichen. Nur so kann man erwarten, dass eine Übertragung der gewonnenen Erfahrungen auf andere Situationen möglich wird.

Konkretes Handeln und vorbereitendes Rechnen ermöglichen

Die Handlungsmöglichkeiten der Einführungsphase sollten den Kindern – so lange sie notwendig sind – erhalten bleiben. Innerhalb der Klasse kann ohne Probleme gleichzeitig auf verschiedenen Abstraktionsniveaus gearbeitet werden. Als Verbindungsglied zwischen konkretem Handeln und formalem Operieren mit Bruchzahlen treten ikonische Darstellungen und das probierende Rechnen mit Tabellen verhältnisgleicher Zahlenpaare. Dabei wählen die Kinder ihren individuellen Möglichkeiten entsprechende Formen.

Bruchrechnung zeitlich entzerren

Bruchrechnung ist zu dicht gedrängt im 6. Schuljahr. Schon im 5. Schuljahr kann mit der Erarbeitung einer fundierten Bruchvorstellung begonnen werden. (Die meisten Lehrpläne lassen diese Möglichkeit zu, da die Klassen 5

und 6 als Einheit verstanden werden.) Mit Beginn der Klasse 6 kann der 2. Teil zur Bruchrechnung folgen (Erweitern und Kürzen; Multiplikation).
Im 7. Schuljahr ist dann der abschließende Teil vorgesehen. Die vorliegende Unterrichtseinheit „Gerechtes Teilen“ bietet Hilfestellung bei der Realisierung der oben thesenartig beschriebenen Konzeption zum Einstieg in die Bruchrechnung.

Zu den Inhalten
Die Unterrichtseinheit „Gerechtes Teilen“ ist als Einstieg in die Bruchrechnung gedacht.

Gerechtes Teilen als brucherzeugende Situation im Mathematikunterricht
Gerechtes Teilen ist im Alltag kein eindeutiger Begriff: Reste können liegen bleiben oder einfach verschenkt werden. Wenn man etwas nicht mag, findet man es ungerecht, genau so viel nehmen zu müssen wie die anderen. In der Unterrichtseinheit wird deshalb geklärt, was „Gerechtes Teilen“ im Unterricht von nun an bedeuten soll.

Anteilaspekt und Verhältnisaspekt von Brüchen
Die Betrachtung verschiedener Verteilsituationen, in denen das einzelne Kind jeweils gleich viel bekommt, rückt neben den zu verteilenden Gegenständen auch die beteiligten Personen stärker ins Blickfeld. Das ermöglicht den Kindern bei den Argumentationen, je nach Bedarf zwischen den beiden Sichtweisen „Bruch als Anteil“ und „Bruch als Verhältnis“ zu wechseln.

Bedeutung von Brüchen in einem Kontext
Für den Lernprozess ist es entscheidend, dass die Kinder alle in der Anfangsphase gesammelten Erfahrungen in den Formalismus mit aufnehmen. Bei der Einführung der Bruchschreibweise wird deshalb ausführlich geklärt: Welche Situationen, welche Handlungen, welche Bilder, welche Rechnungen werden beim gerechten Teilen in den einzelnen Brüchen reflektiert?

Grundlagen für das Rechnen mit Bruchzahlen
Da von Anfang an auch mehrere Gegenstände zu verteilen sind, werden durch unterschiedliche Verteilstrategien sozusagen nebenbei additive Zusammenhänge zwischen Brüchen aufgezeigt, auf die man später bei der Einführung der Addition und der Multiplikation mit natürlichen Zahlen zurückgreifen kann.

Teilbarkeit natürlicher Zahlen
Im Rahmen der Unterrichtseinheit besteht die Möglichkeit, ausgehend von konkreten Problemstellungen auf Teilbarkeitsfragen einzugehen, Begriffe wie Teiler und Primzahl zu klären und gemeinsame Teiler verschiedener Zahlen zu bestimmen.

Beziehung zu anderen mathematischen Themengebieten
Beim gerechten Teilen wird über die Tabellen verhältnisgleicher Zahlenpaare ein Zusammenhang zwischen den Themenbereichen Bruchrechnung und Proportionale Zuordnungen hergestellt. Es wird ein bei den Kindern vorhandenes (wenn auch sehr begrenztes) Verständnis von proportionalen Zuordnungen benutzt, um ihr Wissen über Brüche auszuweiten.

Literaturhinweise
Die Idee zur Unterrichtseinheit „Gerechtes Teilen“ geht auf die folgenden Veröffentlichungen von Leen Streefland zurück:
Leen Streefland: Fractions in Realistic Mathematics Education, Dordrecht, Boston, London 1991
Leen Streefland: Pizzas-Anregungen, ja schon für die Grundschule, in: Mathematik lehren, 16 (1986), S. 8 - 11
Leen Streefland: Ungleichnamige Brüche abziehen im Schneckentempo, in: Mathematik lehren, 16 (1986), S. 12 - 15
Ina Kurth, „Einstieg(e) in die Bruchrechnung“ in: Mathematik lehren, 73 (1995), S. 20 ff.

Die Unterrichtseinheit „Gerechtes Teilen“ im Überblick

1. Einstieg

Es wird beobachtet, welche Fähigkeiten und Fehlvorstellungen im Umgang mit Brüchen zu Beginn der Bruchrechnung bei den Kindern vohanden sind.

- Konkrete Gegenstände teilen

  Die besonderen Bedingungen des gerechten Teilens im Mathematikunterricht werden herausgearbeitet. Die Kinder machen erste Handlungserfahrungen mit verschiedenen selbst gewählten Modellen

- Arbeitsblatt „Süßigkeiten verteilen“

- In der Pizzeria
  - Einführung in den Kontext: Arbeitsblatt Pizzeria (1)
  - Gleichwertige Verteilsituationen: Arbeitsblätter Pizzeria (2) - (4)
  - Tischgruppenaufteilung: ein Sichtwechsel: Arbeitsblätter Pizzeria (5), (6)
  - Bedeutung von Brüchen im Pizzakontex

2. Gleiche Teile herstellen, vorgegebene Bruchteile erkennen

Arbeitsblatt Die Zeichenuhr
Bruchteile des Vollkreises mithilfe der Minuteneinteilung darstellen

Teilbarkeit: Teiler von 60

Arbeitsblatt Mäusepartys
Bruchteile mithilfe von Papierstreifen erzeugen

Primzahlen

Arbeitsblatt Süße Bruchteile
Bruchteile bei gerasterten Rechtecken mithilfe der Rasterstruktur darstellen

Teiler

Arbeitsblatt Fahnen
Die auf Fahnen vorhandenen Unterteilungen so verwenden oder ergänzen, dass die vorgegebenen Bruchteile benannt werden können

3. Weiteres Übungsmaterial

- Arbeitsblätter zur Differenzierung
- Vorschlag für eine Klassenarbeit

Inhaltsverzeichnis "Gerechtes Teilen"

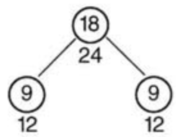
Herausforderungen und Differenzierungsmaterial

Tischgruppenaufteilungen: ein Sichtwechsel

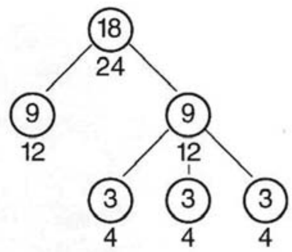
Während im vorigen Abschnitt, ausgehend von zeichnerischen Lösungen bei einfachen Verteilsituationen, Lösungen für komplexere Situationen zusammengesetzt wurden, geht es hier um den umgekehrten Weg. Man beginnt mit einer komplexen Verteilsituation in der Pizzeria und versucht, sie durch Aufteilung in mehrere gleichwertige Tischgruppen so lange zu vereinfachen, bis sich zeichnerisch gut lösbare Verteilsituationen ergeben.

Dazu braucht man zunächst eine einfachere Darstellung für die Verteilsituation an einem Tisch, weil das Zeichnen sonst zu aufwendig wird. Gezeichnet wird nur noch der kreisrunde Tisch, die Anzahl der Pizzas wird hinein- und die Anzahl der Kinder daruntergeschrieben, z. B.

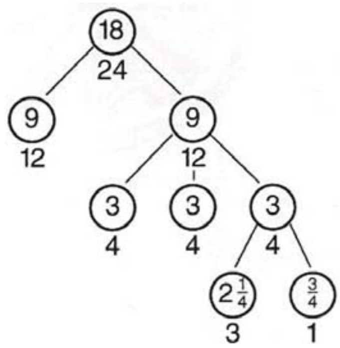
Eine mögliche Unterrichtssituation beginnt mit folgender Aufgabe: 24 Kinder kommen in die Pizzeria und bestellen 18 Pizzas. Einen Tisch, an dem alle sitzen können, gibt es nicht. Vielleicht geht es so:



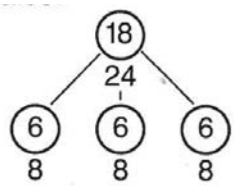
Der eine Tisch ist reserviert, da muss man sich weiter aufteilen:



An einem Vierertisch gibt es Krach, Tobias hat sich schon den ganzen Tag über Anna geärgert. Er nimmt seinen Pizzaanteil und setzt sich alleine ans Fenster:



Heute ist unten nichts frei. Die Kinder müssen in die obere Etage gehen, und da gibt es keine so großen Tische, also:



Einführung Mathekoffertasche Zaubern – Spielen – Knobeln

Die Aufgaben im Mathekoffer „Zaubern – Spielen – Knobeln“ bewirken von vornherein durch die Themenstellungen ein hohes Maß an Motivation. Unser zentrales Anliegen bei der Auswahl der Aufgaben ist die Förderung des Problemlösens als zentraler mathematische Aktivität im modernen Unterricht. Der Koffer kann zu einem Aufbau von Problemlösekompetenzen in der Sekundarstufe I über die Jahrgänge 5/6 (Zaubern), 7/8 (Spielen) hin zur 9/10 (Knobeln) beitragen.

Darüber hinaus sind die Aufgaben so gestaltet, dass Differenzierungsmöglichkeiten entweder explizit angeboten oder im Lehrerkommentar aufgewiesen werden.
Alle Zaubereien, Spiele und Knobelaufgaben können im Unterricht flexibel eingesetzt werden. Sie eignen sich sowohl für Projekt- als auch insbesondere für den Alltagsunterricht.

Jedem der drei Abschnitte werden Übersichten vorangestellt, in denen u. a. die mit den Aufgaben verbundenen inhaltsbezogenen Kompetenzen genannt werden. Die bereits genannten Einsatzmöglichkeiten des Kofferinhalts in den verschiedenen Altersstufen sind durchaus veränderbar und abhängig von der individuellen Lerngruppe. So kann beispielsweise ein Zaubertrick, der für die Klasse 5 und 6 angelegt ist, durchaus gewinnbringend in der 7 oder 8 eingesetzt werden. Und auch die Knobelaufgaben, die wir für die 9/10 vorgesehen haben, sind durchaus auch für jüngere Schülerinnen*) geeignet.

Die Schülerinnenaufgabenblätter sind in den Bereichen Zaubern und Knobeln so gestaltet, dass im oberen Bereich die Beschreibung des Tricks bzw. die Knobelaufgabe steht. Im unteren Bereich finden sich Aufgabenstellungen und Angebote zum Weiterdenken, teilweise auch Hilfen. Auf diese Weise kann die reine Aufgabe von den Weiterdenkangeboten oder Hilfen getrennt werden – etwa durch Umknicken oder Abschneiden des unteren Teils.

*) In Bezug auf die Jungen und Mädchen, die sich mit unseren Zaubereien, Spielen und Knobelaufgaben beschäftigen sollen, haben wir uns für die durchgängige Verwendung der weiblichen Form entschieden. Damit sind die männlichen Lernenden genauso gemeint.

Inhaltsverzeichnis Mathekoffertasche Zaubern – Spielen – Knobeln

Materialliste Mathekoffertasche Zaubern – Spielen – Knobeln

Tragetasche farbig bedruckt

Broschüre ca. 80 Seiten mit CD

20 Würfel gelb
1 Dodekaederwürfel
1 Ikosaederwürfel,

1 Zauberstab
60 Spielsteine in 4 Farben

Einleitung – Zaubern

Zaubern im normalen Mathematikunterricht

Das Zaubern im Mathematikunterricht gehört nicht (nur) in den Bereich der AG und Vertretungsstunde, sondern gerade auch in den normalen Matheunterricht.

Es bietet sich die Möglichkeit „Problemlösen" – eine wesentliche allgemeine mathematische Kompetenz – strukturiert zu unterrichten. Dabei geht es für die Eingangsklassen der SI um die Strategien: Beispiele finden, systematisches Probieren und Notieren.

Alle hier vorgestellten Zaubertricks sind inhaltlich angebunden an den Stoff der Jahrgangsstufen 2 bis 6. Daher können sie hervorragend als Wiederholung von Grundschulmathematik im interessanten Kontext und Kopfrechenübungen zu Beginn der Sekundarstufe eingesetzt werden. Viele der Tricks können aber auch in höheren Klassenstufen gewinnbringend verwendet werden, wenn für das Problemlösen auch das Variablen- und Gleichungskonzept zur Verfügung stehen.

Alle Tricks bieten reichhaltige Möglichkeiten der Binnendifferenzierung.
Da nicht alle Tricks gleich komplex sind, besteht auch die Möglichkeit, die Tricks in arbeitsteiliger, leistungsdifferenzierter Gruppenarbeit erarbeiten und dann wechselseitig präsentieren zu lassen.

Der typische Verlauf einer Zauberstunde:

- Der Zaubertrick wird von der Lehrerin präsentiert.
- Problemfrage: Wie funktioniert der Trick?
- Erarbeitung in EA, GA
- Präsentation der Lösungswege und Lösung(en)
- Präsentation des Tricks durch Schülerinnen
- Reflexion der Problemlösestrategie

Dank an Tanja Musin, Castrop-Rauxel,
für die Vorlage des kleinen Zauberers

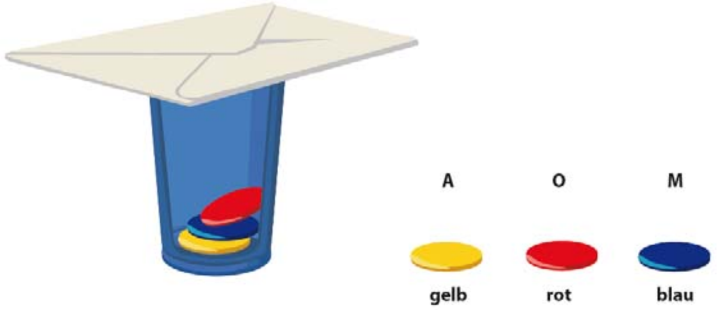
Vorhandene Tricks:

Nr.	Name des Tricks	Inhaltliche Kompetenzen	Bemerkung	Schwierigkeitsgrad	Seite
1	Die Magische Kugel	Kopfrechnen Multiplikation/ Addition Quersumme bilden	Erklärung des Tricks mittels Stellenwertüberlegungen	**	9
2	Der Münztrick	Kopfrechnen (Zahlenraum bis 20)	Einführung zum systematischen Probieren	*	11
3	Der Zauberstreifentrick	Additionsaufgaben (Zahlenraum bis 50)	Strukturen erkennen	*	13
4	Der Zahlenstreifentrick	Addition zwei-, drei- oder mehrstelliger Zahlen mit Übertrag	Strukturen erkennen	***	16
5	Das magische Zahlenquadrat	einfache Addition	Strukturen erkennen, additive Zerlegung von Zahlen	**	21
6	Der Kartentrick	Stellenwertsystem	Verbindung zur magischen Kugel (Trick 1)	*	25
7	Der Rechentrick	Subtraktion mit beliebiger Stellenzahl	Quersumme – Verbindung zu Trick 1 und 7	**	27
8	Der Würfelturmtrick	Einfache Addition und Multiplikation	Strukturen erkennen	*	29
9	Würfeltrick	Addition im Zahlenraum bis 50	Strukturen erkennen, vorher Würfelturmtrick (9)	***	31
10	Der Kalendertrick	Addition/Anwendung des Distributivgesetzes im Kopf	Strukturen erkennen, additive Zerlegung von Zahlen Vergleich unterschiedlicher Lösungswege	***	33
11 CD	Gedankenlesen	Multiplikation im Kopf/ Quersumme	Verbindung zur mag. Kugel / Kartentrick (Trick 1 und 7)	**	
12 CD	Lieblingszahltrick	Schriftliches Multiplizieren üben	Strukturen erkennen durch systemat. Aufschreiben	**	
13 CD	Würfelzahlentrick	Addition und Multiplikation	Struktur erkennen	*	
14 CD	Zahlenkartentrick		Zahlen im 2er-System schreiben	***	
15 CD	Zauberwürfeltrick	Addition dreistelliger Zahlen, Kopfrechnen	System erkennen	***	

… die letzte Seite

aus dem Mathekoffer Wahrscheinlichkeit

OMA-Spiel II



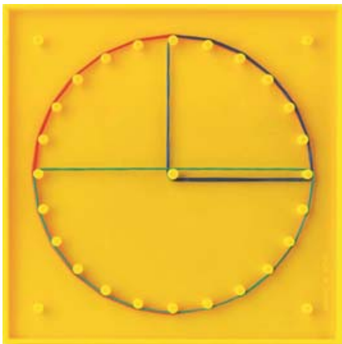
Zur Grafik: Im Becher lagen 2 rote (für O), 2 blaue (für M), 2 gelbe (für A) Chips. Gezogen wurden gelb/rot/blau mit einem Griff für AOM, neu sortiert OMA, da der eine Griff keine Reihenfolge vorgibt, also eine „richtige" Abfolge.

Fragestellung
In einer Urne liegen 2 Buchstabenkärtchen, die ein O tragen, 2 mit M und 2 mit A.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich die Abfolge OMA, wenn du

a) 3mal nacheinander ein Buchstabenkärtchen ziehst, ohne es zurückzulegen?
b) mit einem Zug drei Buchstabenkarten ziehst und sie dann ordnest?

---

aus dem Mathekoffer Brüche

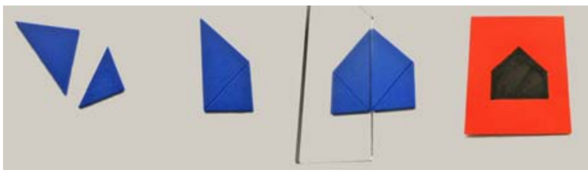


Welche Bruchteile sind dargestellt?

---

aus dem Mathekoffer Geometrie

Falten und Spiegeln



Mit einem Spiegel und ebenen Figuren lässt sich leicht ein Spiel erstellen, das gar nicht so einfach ist. Nimm dir alleine zwei Figuren, setze sie zu einer zusammen, lege sie vor den Spiegel und zeichne die Gesamtfigur ab – siehe das Beispiel. Tausche mit einer Mitschülerin die Zeichnung. Versuche jetzt, die Ursprungsfiguren zu finden, die zusammengelegt und gespiegelt die erhaltene Zeichnung liefern.

---

aus der Mathekoffertasche Zaubern – Spielen – Knobeln

Marcos Zahlenreihe

Eine Knobelei zum Thema Arithmetik
Marco möchte alle Zahlen von 1 bis 15 so in die 15 Kästchen schreiben, dass die Summe von jedem Paar benachbarter Zahlen eine Quadratzahl ergibt:

Stehen beispielsweise in drei aufeinander folgenden Kästchen die Zahlen 10, 6 und 3, so ergibt die 6 sowohl mit der 10 in dem linken Nachbarkästchen als auch mit der 3 in dem rechten Nachbarkästchen eine Quadratzahl: $10 + 6 = 16 = 4^2$; $6 + 3 = 9 = 3^2$.