Die Corona-Pandemie

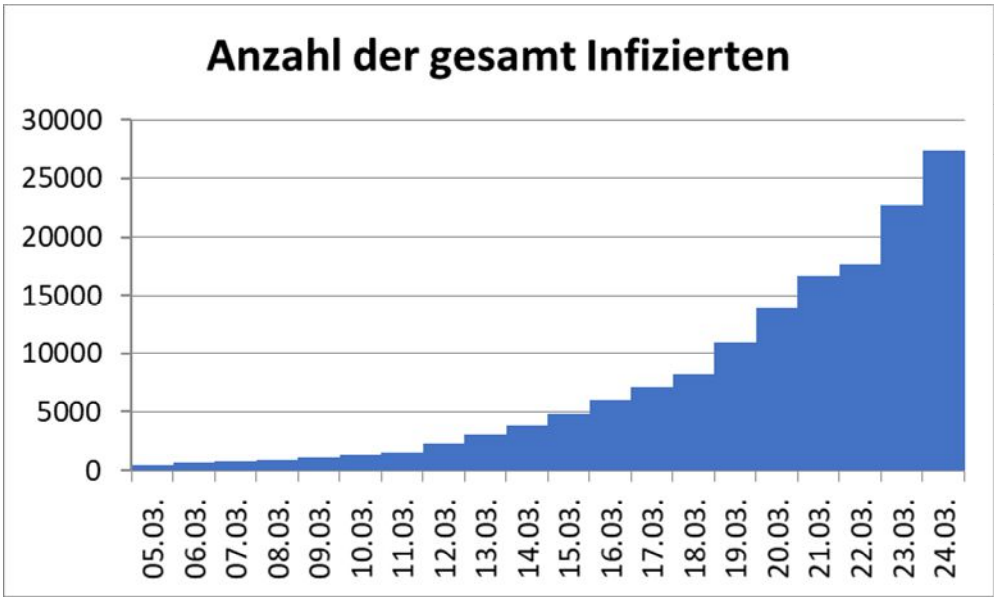
Spätestens seit dem 16.03.2020 sind in allen Bundesländern weitreichende Maßnahmen in Kraft getreten (u.a. wurden die Schulen geschlossen), um die Ausbreitung des COVID-19-Virus (Corona) zu verhindern.

Im Folgenden sind mit dem Wort „Infizierter“ diejenigen Menschen gemeint, die sich im Laufe der gesamten Pandemie mit dem Virus infiziert haben oder noch infizieren werden, unabhängig davon, ob sie mittlerweile wieder genesen sind oder nicht.

Folgende Daten sind vom Robert-Koch-Institut[1] veröffentlicht worden:

Datum	Zahl der insgesamt Infizierten in Deutschland	Wachstumsfaktor der Infektion zum Vortag
05.03. Do	400	
06.03. Fr	639	639:400=1,598
07.03. Sa	795	795:639=1,244
08.03. So	902	902:795=1,135
09.03. Mo	1139	1139:902=1,263
10.03. Di	1296	
11.03. Mi	1567	
12.03. Do	2369	
13.03. Fr	3062	
14.03. Sa	3795	
15.03. So	4838	
16.03. Mo	6012	
17.03. Di	7156	
18.03. Mi	8198	
19.03. Do	10999	
20.03. Fr	13957	
21.03. Sa	16662	
22.03. So	17610	
23.03. Mo	22672	
24.03. Di	27436	

[1] https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/Situationsberichte/Archiv.html



Aufgaben

Das Robert-Koch-Institut trifft jeden Tag fundierte Aussagen über die Ausbreitung der Krankheit. Dadurch ermöglicht es, dass zukünftige Werte prognostiziert werden können, um die Maßnahmen der Politik darauf abzustimmen. Ein wichtiger Faktor dabei ist der Wachstumsfaktor der Infektion zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tagen.

a) Beschreibe, ob man die Auswirkungen der Maßnahmen, die am 16.03. in Kraft getreten sind, anhand der Daten erkennen kann oder nicht. Erläutere kurz in eigenen Worten, woran man dies erkennt oder warum man dies noch nicht erkennen kann.

b) Berechne jeweils, um welchen Faktor sich die Zahl der Infizierten von einem zum anderen Tag ändert (Wachstumsfaktor[2]), indem du die Tabelle ergänzt.

c) Wenn man die Wachstumsfaktoren betrachtet, fällt auf, dass diese nicht immer gleich sind. Markiere besonders auffällige Werte in der Tabelle und begründe, warum es zu diesen Schwankungen kommt.

d) Bestimme mithilfe der gegebenen Daten einen Schätzwert dafür, wie viele Infizierte es wohl am Mittwoch, 25.03. in Deutschland gegeben hat, und erläutere dein Vorgehen.

   Recherchiere, wie viele Infizierte es tatsächlich am Mittwoch, 25.03 in Deutschland gegeben hat. Vergleiche diese Daten mit deinem Schätzwert und begründe eventuelle Unterschiede.

Um Prognosen treffen zu können, wird die Realität oft vereinfacht dargestellt, indem z.B. Durchschnittswerte verwendet werden. Der durchschnittliche Wachstumsfaktor der Infektion beträgt 1,255.

e) Erstelle mithilfe dieses Wachstumsfaktors und der Angabe 400 Personen am 05.03. eine exponentielle Funktionsgleichung I(t). Dabei steht t für die Anzahl der Tage, die seit dem 05.03. vergangen sind, und I(t) für die Zahl der gesamt Infizierten im Modell bis zum Tag t.

f) Bestimme mithilfe der Modellierung (Funktion) die Werte für Mittwoch, den **11.03.,** Freitag, den 20.03. und Montag, den 23.03.und berechne die prozentuale Abweichung des Modellwertes von den tatsächlichen Werten. Beurteile, ob man mit der Funktion die Wirklichkeit annäherungsweise gut darstellen kann.

---

[2] Hinweis: Den Wachstumsfaktor berechnet man, indem die Zahl der Infektionen eines Tages durch die Anzahl der Infektionen am jeweiligen Vortag teilt.

g) Bestimme mithilfe der von dir aufgestellten Funktionsgleichung, wann es nach diesem Modell die erste infizierte Person in Deutschland gegeben hätte. Recherchiere, wann es tatsächlich den ersten Infizierten in Deutschland gab. Erläutere eventuelle Abweichungen.

h) Ein Virenforscher geht davon aus, dass der Wachstumsfaktor automatisch zurückgehen wird, sobald etwa 70% aller Deutschen infiziert sind. Überprüfe, ob die Modellierung noch sinnvoll ist, sobald 70% aller Deutschen infiziert sind. Innerhalb dieser Aufgabe darf davon ausgegangen werden, dass sich ein Mensch nur einmal infizieren kann.

i) Aufgrund der festgelegten Schutzmaßnahmen in Deutschland (z.B. Schulschließungen, Kontaktverbot etc.) wird die Modellierung im Verlauf der Pandemie die Realität immer ungenauer abbilden. Aus Spaß an der Mathematik: Berechne, innerhalb welchen Zeitraums sich nach dem Modell die Zahl der Infizierten von 1.000.000 auf 2.000.000 verdoppeln würde.

Wir alle merken die Veränderung der Corona-Pandemie auf unser tägliches Leben. Weitreichende Schutzmaßnahmen wurden getroffen, um die Ausbreitung des Virus einzudämmen. U.a. wurden ab dem 16.03. auch die letzten Schulen in Deutschland geschlossen und wir Lehrende sind aufgefordert Lernmaterialien an die Schülerinnen und Schüler zuschicken. Ein solches Lernmaterial kann auch dieses Arbeitsblatt sein, welches sich mit dem Modellieren der Infektion beschäftigt. Gedacht ist das Arbeitsblatt für die Jahrgangsstufe 9/10 als Übung zur Exponentialfunktion. Allerdings kann es auch schon früher eingesetzt werden, wenn Funktionen bekannt sind und man die Lösung der Aufgabe e) den Schülern schenkt. Das Arbeitsblatt wurde von der MUED Regionalgruppe OWL erstellt.

Lösung

a) Da die Infektion eine Inkubationszeit (d.h. Zeit nach der Ansteckung bis zum Ausbruch der ersten Symptome) von 2 bis 14 Tagen hat, dauert es eine Weile, bis man Auswirkungen der Schutzmaßnahmen sehen kann. Am Wochenende 21.+22.03. sieht es kurzzeitig so aus, als würde der Wachstumsfaktor kleiner werden, am Montag schnellt er aber wegen der Nachmeldungen wieder in die Höhe. Es lässt sich demnach noch keine aussagekräftige Prognose stellen.

b) siehe Tabelle:

Datum	Zahl der insgesamt Infizierten	Wachstumsfaktor der Infektion zum Vortag
05.03. Do	400	-
06.03. Fr	639	639/400=1,5975
07.03. Sa	795	1,244
08.03. So	902	1,135
09.03. Mo	1139	1,263
10.03. Di	1296	1,138
11.03. Mi	1567	1,209
12.03. Do	2369	1,512
13.03. Fr	3062	1,293
14.03. Sa	3795	1,239
15.03. So	4838	1,275
16.03. Mo	6012	1,243
17.03. Di	7156	1,190
18.03. Mi	8198	1,146
19.03. Do	10999	1,342
20.03. Fr	13957	1,269
21.03. Sa	16662	1,194
22.03. So	17610	1,057
23.03. Mo	22672	1,287
24.03. Di	27436	1,210

c) Hier wird eine mögliche Lösung skizziert. Die SchülerInnen können aber auch andere gut begründete Lösungen erstellen:

Es fällt auf, dass die Werte am Samstag und Sonntag kleiner sind als die restlichen Werte. Am Montag und Dienstag dagegen steigen die Werte wieder an. Dies hat mit dem Meldeverfahren des Robert-Koch-Instituts zu tun, da viele Gesundheitsämter die Zahl der Infizierten am Wochenende nicht übermitteln und die Werte am Anfang der Woche nachliefern.

d) Eine Möglichkeit: Berechnet man das arithmetische Mittel aller Wachstumsfaktoren, ergibt sich 1,255. Damit lässt sich für den 25.03. die Zahl der Infizierten berechnen: $27436 \cdot 1{,}255 = 34432$. Alternativ könnte auch mit dem letzten gegeben Wachstumsfaktor weitergerechnet werden. Denkbar wäre auch die Bildung des Durchschnittswertes im Sinne eines Differenzenquotienten.

Die tatsächliche Zahl der Infizierten betrug am 25.03. 31554. Der Unterschied lässt sich dadurch erklären, dass es sich nur um eine mathematische Modellierung handelt und die Wachstumsfaktoren relativ stark schwanken.

e) $i(t) = 400 \cdot 1{,}255^t$

f) $i(6) = 400 \cdot 1{,}255^6 = 1562{,}87 \approx 1563$

Prozentualer Anteil: $\frac{1563}{1567} = 99{,}74\%$ → Abweichung 0,26%

$i(15) = 400 \cdot 1{,}255^{15} = 12070{,}24 \approx 12070$.

Prozentualer Anteil: $\frac{12070}{13957} = 86{,}48\%$ → Abweichung 13,52%

$i(18) = 400 \cdot 1{,}255^{18} = 23858{,}72 \approx 23859$.

Prozentualer Anteil: $\frac{23859}{22672} = 105{,}23\%$ → Abweichung 5,23%

Man erkennt, dass die Zwischenwerte unterschiedlich weit von den tatsächlichen Werten entfernt sind. Einige Werte weichen von dem tatsächlichen Wert nach oben und einige Werte weichen von dem tatsächlichen Wert nach unten ab.

Die Modellierung scheint aber zur Bestimmung von unbekannten Zwischenwerten durchaus eine orientierende Annäherung zu geben.

g) $1 = 400 \cdot 1{,}255^t$ →t= $\log_{1,255}(1/400) = -26{,}4 \approx -27$
D.h. 27 Tage vor dem 05.03. wurde laut dem Modell der erste Patient positiv getestet, also am 07.02.

Der erste Infizierte in Deutschland wurde am 28.01. in Deutschland gemeldet. Die mathematische Berechnung weicht hiervon ab. Hintergrund ist, dass man in Deutschland von zwei Infektionsquellen ausgeht (Bayern und NRW-Heinsberg). Daher wurden über einen Zeitraum von ca. 1 Woche zwischen den beiden Quellen gar keine Infektionsmeldungen eingereicht.

h) Die Modellierung ist nicht mehr sinnvoll, da ab einem bestimmten Schwellenwert für die Anzahl der Infizierten davon ausgegangen werden muss, dass die Anzahl an Neuinfektionen zurückgeht. Der Grund hierfür ist, dass Menschen sich nicht mehrfach anstecken können und ein Infizierter somit nicht unbedingt auf jemanden trifft, der noch nicht infiziert ist. Deshalb wird der Wachstumsfaktor im späteren Verlauf gegen 1 tendieren – und die Anzahl der gesamt Infizierten wird nahezu konstant. [Wichtig ist hier, dass man eine Person immer noch als infiziert zählt, auch wenn sie wieder gesund wird.]

i) Hier gibt es unterschiedliche Arten der Lösung.
Eine Möglichkeit wäre:

I(t)=1.000.000 -> $1.000.000 = 400 \cdot 1{,}255^t$ →t= $\log_{1,255}(\frac{1.000.000}{400}) = 38{,}55$

I(t)=2.000.000 -> $2.000.000 = 400 \cdot 1{,}255^t$ →t= $\log_{1,255}(\frac{2.000.000}{400}) = 41{,}97$

Dazwischen liegen ca. 3,5 Tage.