Infos: www.mued.de

Alles genormt: Treppen und Trigonometrie

Die Bauvorschriften in Deutschland geben mit der Norm DIN 18065 vor, wie man Treppen bauen muss. Zum einen geht es dabei um die Schräge der Treppen (siehe Abbildung 1) und auch um das sogenannte Schrittmaß (siehe Abbildung 2). Du sollst nun verschiedene Treppen auf diese Norm hin prüfen.

A Die Schräge von Treppen:

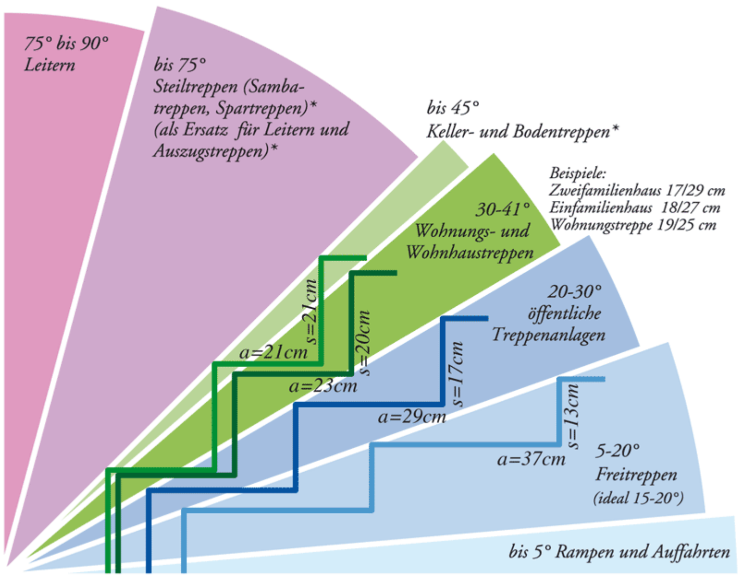
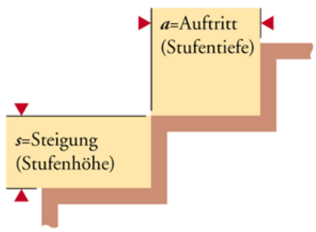


Abbildung 1 (Quel-

B Die Schrittmaßregel: Der Auftritt a + zweimal Steigung s muss 63 cm betragen.



59 bis 65 cm

mittlere Schrittmaßlänge
(D/63 cm=„Spazierschritt")

27 cm Auftritt (a)
18 cm Steigung (s)

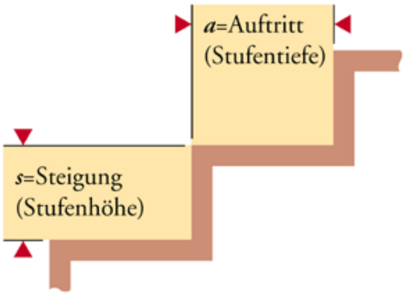
bequeme Wohnungstreppe
(2x18)+27 cm=63cm

21 cm Auftritt (a)
21 cm Steigung (s)

steile Kellertreppe
(2x21)+21cm=63 cm

Abbildung 2 (Quelle: http://www.treppenbau-

Rechts siehst Du die maßstäbliche Konstruktionszeichnung für eine Treppe.



a) Bestimme den Steigungswinkel dieser Treppe auf zwei verschiedene Arten:
- durch eine Winkelmessung
- dadurch, dass Du die Stufenhöhe und die Stufentiefe auf dem Bild misst und damit den Winkel berechnest.

b) Die Treppe wurde im Maßstab 1:15 gezeichnet. Rechne nach, ob die Schrittmaßregel beachtet wurde!

c) Untersucht in Partnerarbeit, ob unser Schultreppenhauses das richtige Schrittmaß hat. Untersucht außerdem, ob der Steigungswinkel den Vorgaben entspricht, die in Abbildung 1 gezeigt werden. Stellt ein Messprotokoll zusammen: Stufenhöhe, Stufentiefe, Schrittmaßüberprüfung, Berechnung des Winkels, Bewertung der Ergebnisse.

Nun soll eine Treppe mit der Schräge von 20° gebaut werden.

d) Fertige zunächst eine Konstruktionszeichnung der Treppe (3 gleich große Stufen) an: Der Steigungswinkel soll 20° betragen und die Stufentiefe (also der Auftritt) soll in der Zeichnung 2cm lang sein. Bestimme die zugehörige Stufenhöhe zur Kontrolle nach beiden Methoden aus a).

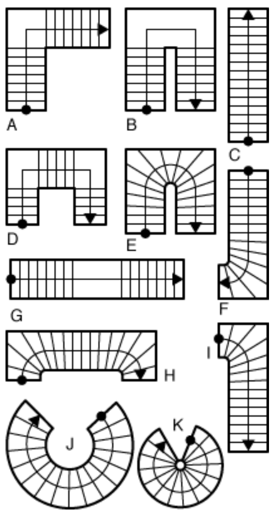
e) Bestimme, welche Stufentiefe und welche Stufenhöhe die tatsächliche Treppe muss, wenn sie die Schrittmaßlänge erfüllen soll.

Die Treppenbauer verwenden die folgende Formel, um für jeden beliebigen Steigungswinkel α sofort die die Stufenhöhe s zu berechnen:

$$s = \frac{\tan(\alpha)}{1 + 2 \cdot \tan(\alpha)} \cdot 63cm$$

f) Kontrolliere mit dieser Formel, ob Du in e) den richtigen Wert berechnet hast.

In einem neuen Wohnhaus soll eine Treppe vom Erdgeschoss in den ersten Stock gebaut werden (Höhenunterschied 2,80m).



g) Plane eine gerade Treppe mit dem Winkel 35°, die das Schrittmaß einhält: Wie viele Stufen hat sie?
Wie viel „Platz“ benötigt sie (und was ist überhaupt damit gemeint)? Welchen Spielraum hat man, wenn man die Vorgabe für die Schräge von Treppen in Wohnhäusern beachtet?

h) Plane die Treppe so, dass man auf halber Höhe die Richtung wechselt.

i) Plane eine Wendeltreppe.

j) …

Lösungen:

a) Die Winkelmessung ergibt $\beta \approx 33{,}5^{o}$. Außerdem misst man $a = 1{,}85cm$ und $s = 1{,}2cm$. Dann erhält man mit $\tan(\beta) = \frac{s}{a}$: $\beta = \tan^{-1}(\frac{1{,}2cm}{1{,}85cm}) \approx 33^{o}$.

b) In der Wirklichkeit ist $a = 1{,}85cm \cdot 15 = 27{,}75cm$ und $s = 1{,}2cm \cdot 15 = 18cm.$
Daraus ergibt sich $a + 2 \cdot s = 63{,}75cm$. Ja, die Schrittregel wurde beachtet.

c) Mal schauen, ob Deine Schule ordentlich geplant und gebaut worden ist!
Erstaunlich: Unsere Messungen haben ergeben, dass die Treppen vom EG in die 1. Etage andere Maße als die Treppen von der 1. Etage in die 2. Etage haben.

d) Rechnerisch: $\tan(\beta) = \frac{s}{a}$, also $s = a \cdot \tan(\beta) \approx 0{,}73cm.$

e) Wenn $1{:}\,m$ die maßstäbliche Verkleinerung ist, dann muss $(2 \cdot 0{,}73 + 2) \cdot m = 63$ sein. Daraus ergibt sich $m \approx 18{,}2$. Also muss
- die tatsächliche Stufentiefe $a = 2cm \cdot 18{,}2 = 36{,}4cm$ betragen
- und die Stufenhöhe $s = 0{,}73cm \cdot 18{,}2 = 13{,}3cm$ groß sein.

f) Einsetzen von $\beta = 20^{o}$ liefert den Wert $s = 13{,}27cm$.

Man könnte d) auch weglassen, dann wird e) deutlich anspruchsvoller.

Zur Lösung könnte man auf die Idee aus d) kommen. Man könnte aber auch die Gleichungen

$$s = a \cdot \tan(20^{o}) \quad \text{und} \quad 2s + a = 63$$

aufstellen und damit die Werte für *a* und *s* bestimmen.

g) Es muss $s = \frac{\tan(35^{o})}{1+2\cdot\tan(35^{o})} \cdot 63cm \approx 18{,}4cm$ sein. Die Zahl *n* der Stufen erhält man mit $n = \frac{h}{s} \approx 14$ Stufen. Der Auftritt ist $a = 63cm - 2 \cdot s = 26{,}2cm$ und deshalb hat die Treppe einen „Platzbedarf" von $l = 14 \cdot 26{,}2cm \approx 367cm$. Der Flur, in dem die Treppe gebaut wird sollte also mindestens $367cm$+ Länge des Platzes vor der Treppe sein. Den Platzbedarf könnte man aber auch einfach mit $\tan(\beta) = \frac{h}{l}$ ausrechnen.

Man kann alle Fälle notieren, wenn man die 4 Ziffern systematisch verteilt. Es entstehen 24 zehnstellige Zahlen, die man prüfen kann. Hier sind sie, der Größe nach sortiert:

1) 7 4 3 5 6 6 4 7 48	2) 7 4 3 5 6 7 4 6 48	3)7 4 3 6 6 5 4 7 48
4) 7 4 3 6 6 7 4 5 48	5) 7 4 3 7 6 5 4 6 48	6) 7 4 3 7 6 6 4 5 48
7) 7 5 3 4 6 6 4 7 48	8) 7 5 3 4 6 7 4 6 48	9) 7 5 3 6 6 4 4 7 48
10) 7 5 3 6 6 7 4 4 48	11) 7 5 3 7 6 4 4 6 48	12) 7 5 3 7 6 6 4 4 48
13) 7 6 3 4 6 5 4 7 48	14) 7 6 3 4 6 7 4 5 48	15) 7 6 3 5 6 4 4 7 48
16) 7 6 3 5 6 7 4 4 48	17) 7 6 3 7 6 4 4 5 48	18) 7 6 3 7 6 5 4 4 48
19) 7 7 3 4 6 5 4 6 48	20) 7 7 3 4 6 6 4 5 48	21) 7 7 3 5 6 4 4 6 48
22) 7 7 3 5 6 6 4 4 48	23) 7 7 3 6 6 4 4 5 48	24) 7 7 3 6 6 5 4 4 48

Damit ist eine Klasse arbeitsteilig gut beschäftigt. – Ergebnis: Alle Zahlen sind durch 36 teilbar. Das macht neugierig.

Im nächsten Schritt lassen sich die Zahlen auf Teilbarkeit untersuchen.
Durch 36 sind Zahlen teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar sind.

- Die entstehenden Zahlen sind immer durch 4 teilbar, weil 48 durch 4 teilbar ist (und die Hunderter und Tausender… sowieso).
- Die Quersumme aller entstehenden Zahlen beträgt 54. Die ist durch 9 teilbar, also auch die zehnstelligen Zahlen.
- Damit sind alle vorkommenden zehnstelligen Zahlen sowohl durch 4 als auch 9 teilbar, also auch durch 36.

Zusatz: Man könnte sogar alle 8 Ziffern vor der 48 wild durcheinanderwirbeln. Alle entstehenden Zahlen wären immer noch durch 36 teilbar, weil die Teilbarkeitsargumente von oben dann immer noch gelten.

Die Bauvorschriften in Deutschland geben mit der 18065 vor, wie man Treppen bauen muss. Zum einen geht es dabei um die Schräge der Treppen (siehe Abbildung 1) und auch um das sogenannte Schrittmaß.
Idee der Aufgabe: Es handelt sich um eine „Blütenaufgabe“, die für verschieden starke Schüler verschiedene Bearbeitungstiefen bietet. Nicht jeder Schüler muss also alle Aufgaben lösen. Jeder sollte aber durch Aufgabenteil a) einen Zugang finden, nachdem vorher die Verwendung des Tangens zur Winkelbestimmung in verschiedenen Anwendungssituationen geübt wurde. Die Kernaufgabe ist der Teil c). Die Lösung dieser Teilaufgabe soll am Ende der Unterrichtsstunde von jedem verstanden worden sein. Die Teile d) bis f) sind anspruchsvolle Erweiterungen für Schüler, die die Kernaufgabe schnell erledigt haben.
Die weiteren Teile könnte man im Rahmen eines größeren Projektes anbieten.