Lukrativ und tödlich

6 Millionen Menschen sterben jährlich weltweit an den Folgen des Rauchens. Davon sind 600 000 Passivraucher.
1 Milliarde Menschen könnten im 21. Jahrhundert an den Folgen des Tabakkonsums sterben, wenn sich die derzeitigen Trends fortsetzen.

Die Zahlen stammen von der Weltgesundheitsorganisation, dem World Tobacco Atlas und dem Deutschen Krebsforschungszentrum.

Frankfurter Rundschau, 27.11.2015

1. Wird bei den "derzeitigen Trends" eher mit einer Abnahme oder eher mit einer Zunahme der Raucherzahlen gerechnet?

2. Nimm an, der "derzeitige Trend" ist eine exponentielle Entwicklung. Mit welchem Prozentsatz wurde dann für die Prognose hochgerechnet?
   Tipp: Integration!
   a) Nimm den gegebenen Anfangswert für das Jahr 2000 an.
   b) Gehe davon aus, dass der gegebene Anfangswert für das Jahr 2014 (siehe Zeitungsartikeldatum) gilt.
   c) Vergleiche die Ergebnisse. Erläutere plausibel, welcher der beiden p- bzw. a-Werte größer sein muss.

3. Führe die Berechnungen aus 2a und 2b statt über eine Integralgleichung mit einer Tabellenkalkulation durch.
   Tipp: Wähle systematisch unterschiedliche Zunahmeprozentsätze, bis sich in etwa die gewünschte Summe ergibt.

4. Diskutiere Unterschiede in den Ergebnissen zwischen 2 und 3.

1. Jährliche Todeszahlen: 6 Millionen
   Todeszahlen in den 100 Jahren des 21. Jahrhunderts bei gleichbleibenden Zahlen:
   100 · 6 Mio. = 600 Mio.
   Da 1 Milliarde als Todeszahl angegeben ist, wird eine Zunahme der Raucherzahlen erwartet.

2. Ansatz: Exponentialfunktion und Integration

   a) $f(x) = 6 \cdot 10^6 \cdot a^x$
   Summiert (integriert) man die Funktionswerte von 2000 bis 2100 (21. Jahrhundert), so soll sich 1 Milliarde ergeben. Unterstellt man schon für 2000 rund 6 Millionen Tote durch Rauchen, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$f(x) = 6 \cdot 10^6 \cdot a^x$$

$$\int_0^{100} 6 \cdot 10^6 \cdot a^x \, dx = 10^9$$

$$6 \cdot 10^6 \cdot \left.\frac{a^x}{\ln a}\right|_0^{100} = 10^9$$

$$\left. a^x \right|_0^{100} = \frac{10^3}{6} \cdot \ln a$$

$$a^{100} - 1 = \frac{10^3}{6} \cdot \ln a$$

$$a \approx 1{,}00952\,*$$

$$p\,\% \approx 0{,}95\,\%$$

   *Grafikfähiger Taschenrechner GTR: Untersuche den Graf zu
   $g(x) = x^{100} - 1 - \frac{10^3}{6} \cdot \ln x$ auf Nullstellen.
   Oder: lass die "allgemeine Gleichung"
   $x^{100} - 1 = \frac{10^3}{6} \cdot \ln x$ lösen.
   Hochgerechnet wurde eine exponentielle Entwicklung mit 0,95 % Wachstumsrate pro Jahr.

   b) Da der Artikel Ende 2015 erschien, sind mit 6 Millionen Toten die von 2014 gemeint. Dann lautet der Ansatz ohne den Vereinfachungsschritt in a:

$$\int_{-14}^{86} 6 \cdot 10^6 a^x \, dx = 10^9$$

$$\left. a^x \right|_{-14}^{86} = \frac{10^3}{6} \cdot \ln a$$

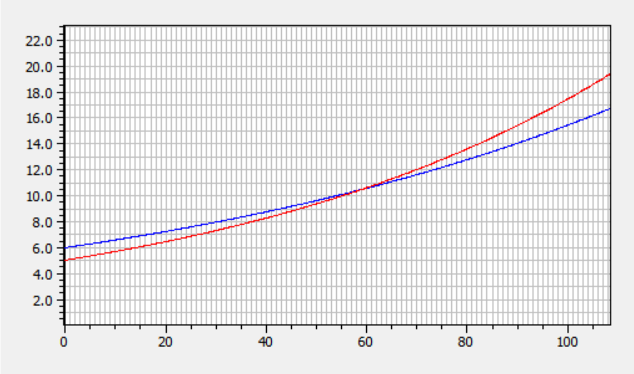
$$a^{86} - a^{-14} = \frac{10^3}{6} \cdot \ln a$$

$$a \approx 1{,}012503$$

$$p\,\% \approx 1{,}25\,\%$$

   Hier lautet der "derzeitige Trend": Die Zahl der Toten durch Rauchen nimmt seit 2000 und auch weiterhin um rund 1,25 % pro Jahr zu.

   c) Die Flächenberechnung in b beginnt bei dem Anfangswert $6 \cdot 10^6 \cdot 1{,}0125^{-14} \approx 5{,}04 \cdot 10^6$. Da die Integration bei einem kleineren Wert startet als die in a, muss die Funktion in b stärker zunehmen, um die Fläche 1 Mrd. unter der Kurve zu erreichen. Das trifft hier auch zu, da 0,95 % < 1,25 % bzw.
   1,0095 < 1,0125. Siehe die Skizze unten.



3. Exponentialfunktion und Tabellenkalkulation

In eine Tabellenkalkulation wird der Anfangswert und ein Zunahmeprozentsatz eingegeben. Die hochgerechneten Werten bis 2100 werden summiert. Ergibt sich ein zu hoher Summenwert, so wird der Prozentsatz erniedrigt, sonst erhöht – bis sich in etwa die gewünschte Summe von 1 Milliarde ergibt.

a)

A	B	C	D
Jahr	Raucher	Raucher	Raucher
2000	6,00E+06	6,00E+06	6,00E+06
2001	6060000	6048000	6056460
2002	6120600	6096384	6113451,29
2003	6181806	6145155,07	6170978,87
2004	6243624,06	6194316,31	6229047,78
...	...	...	...
2094	15288341,9	12689405,3	14471245,8
2095	15441225,3	12790920,5	14607420,2
2096	15595637,6	12893247,9	14744876,1
2097	15751593,9	12996393,9	14883625,4
2098	15909109,9	13100365	15023680,3
2099	16068201	13205168	15165053,1
2100	16228883	13310809,3	15307756,2
Summe	1,04E+09	9,27E+08	1,00E+09

Der Startwert im Jahr 2000 liegt bei sechs Mio. Es wird exponentiell hochgerechnet durch Multiplikation des Vorjahreswertes bei festem Zunahmeprozentsatz.

In der letzten Zeile werden alle 101 Werte addiert ausgegeben.

In der Spalte B wurde mit p% = 0,01 hochgerechnet. Die Summe ist mit 1,04 Mrd zu hoch. In der Spalte C war p% = 0,008 mit zu kleiner Endsumme von 927 Mio. Durch Variieren des vorgegebenen Prozentsatzes ergab sich erstmals bei 0,941 % in etwa eine Endsumme von einer Mrd.
Mit 0,94 % liegt der Prozentsatz in derselben Größenordnung wie oben mit 0,95 %.

b)

A	B	C	D
Jahr	Raucher	Raucher	Raucher
2000	5219777,82	4871095,66	5059110,93
2001	5271975,6	4944162,1	5121125,51
2002	5324695,35	5018324,53	5183900,27
2003	5377942,31	5093599,4	5247444,52
2004	5431721,73	5170003,39	5311767,69
2005	5486038,95	5247553,44	5376879,34

Hier liegt der Startwert für 2014 mit sechs Mio fest. Bis zum Jahr 2000 wird exponentiell rückgerechnet, indem der jeweilige Nachjahreswert durch den Faktor 1 + p/100 dividiert wird.
Nach 2014 wird wie oben der Vorjah-

reswert mit dem Faktor multipliziert.

2006	5540899,33	5326266,74	5442789,13
2007	5596308,33	5406160,74	5509506,84
2008	5652271,41	5487253,16	5577042,37
2009	5708794,13	5569561,95	5645405,76
2010	5765882,07	5653105,38	5714607,14
2011	5823540,89	5737901,96	5784656,79
2012	5881776,3	5823970,49	5855565,12
2013	5940594,06	5911330,05	5927342,63
2014	6000000	6000000	6000000
2015	6060000	6090000	6073548
2016	6120600	6181350	6147997,55
2017	6181806	6274070,25	6223359,71
…	…	…	…
2095	13433294,2	20040136,4	16096812,6
2096	13567627,2	20340738,4	16294127,3
2097	13703303,4	20645849,5	16493860,7
2098	13840336,5	20955537,2	16696042,5
2099	13978739,8	21269870,3	16900702,5
2100	14118527,2	21588918,4	17107871,4
Summe	903993468	1136110431	1000038237

In der letzten Zeile werden wieder alle 101 Werte addiert ausgegeben.

In der Spalte B wurde mit p% = 0,01 hochgerechnet. Die Summe ist mit rund 904 Mio zu gering. In der Spalte C war p% = 0,015 mit zu großer Endsumme von rund 1,1 Mrd. Durch Variieren des vorgegebenen Prozentsatzes ergab sich in Spalte D bei 1,2258 % eine Endsumme von rund einer Mrd.
Mit 1,23 % liegt der Prozentsatz in derselben Größenordnung wie oben mit 1,25 %.

4. Zu den Abweichungen

In beiden Ansätzen zu a und b liefert die Tabellenkalkulation ein etwas kleineres p.

- Die summierten Werte in der Tabellenkalkulation können dargestellt werden als Balken der Breite 1 über einem x-Wert k, der von k – 0,5 bis k + 0,5 reicht. Dann entspricht die Balkenfläche dem Tabellenwert an der Stelle k. Für k = 0 bzw. das Jahr 2000 reicht der Balken von -0,5 bis 0,5. Der Balken zu 2100 reicht von 99,5 bis 100,5. Summiert werden also Flächen von -0,5 bis 100,5. Dagegen summiert die Integration nur Flächen von 0 bis 100. Die Balkenflächen sind also insgesamt größer.
- Zur „Glättung" der diskreten Werte durch die Funktion: Für jeden natürlichen x-Wert k liegt die Exponentialfunktion am linken Rand der zugehörigen Balkenfläche bei k – 0,5 zu niedrig, am rechten Rand bei k + 0,5 zu hoch gegenüber der Balkenhöhe, wobei die Abweichung rechts größer ist als links. Das bedeutet, dass die Integration bei jedem Wert k einen etwas größeren Wert liefert als die Balken bei der Tabellenkalkulation. Am Beispiel: Das Integral über $f(x) = 6 \cdot 10^6 \cdot 1{,}00952^x$ ergibt von 49,5 bis 50,5 den Wert 9 636 054 und ist damit etwas größer als f(50) = 9 636 018. Die Fläche, die durch Integration gewonnen wird, ist also größer.
- Die beiden Tendenzen gleichen sich aus, aber nicht ganz. Die Balkenflächen bei der Tabellenkalkulation ergeben insgesamt eine größere Fläche als bei der Integration, dadurch ist dort nur ein etwas kleineres p nötig, um auf 1 Mrd zu kommen.

Kommentar zum ABdM 3/2018

Die Zahl der Raucher-innen unter den Schüler-innen nimmt seit einiger Zeit ab. Aber für viele ist das Rauchen noch lukrativ – und für viele ist es tödlich.
Weltweit nimmt das Rauchen zu, das ist die Prognose, um die es hier geht. Das ist ein Grund, auch im Mathematikunterricht das Thema aufzugreifen. Untersucht wird, ob eine Zunahme prognostiziert wird und wie stark die (als exponentiell unterstellte) Zunahme ist – je nach Interpretation der Meldung.
Das passt in die Integralrechnung in der Oberstufe, bei der der grafikfähige Taschenrechner wirklich benötigt wird. Oder man löst die Gleichung durch systematisches (und arbeitsteiliges) Probieren, geht auch.
Berechnungen mit einer Tabellenkalkulation, in der die Zunahmerate schrittweise geändert wird, ist hier als zweiter Zugang bearbeitet, ebenso ein Vergleich der Werte.

Man kann alle Fälle notieren, wenn man die 4 Ziffern systematisch verteilt. Es entstehen 24 zehnstellige Zahlen, die man prüfen kann. Hier sind sie, der Größe nach sortiert:

1) 7 4 3 5 6 6 4 7 48
2) 7 4 3 5 6 7 4 6 48
3)7 4 3 6 6 5 4 7 48
4) 7 4 3 6 6 7 4 5 48
5) 7 4 3 7 6 5 4 6 48
6) 7 4 3 7 6 6 4 5 48
7) 7 5 3 4 6 6 4 7 48
8) 7 5 3 4 6 7 4 6 48
9) 7 5 3 6 6 4 4 7 48
10) 7 5 3 6 6 7 4 4 48
11) 7 5 3 7 6 4 4 6 48
12) 7 5 3 7 6 6 4 4 48
13) 7 6 3 4 6 5 4 7 48
14) 7 6 3 4 6 7 4 5 48
15) 7 6 3 5 6 4 4 7 48
16) 7 6 3 5 6 7 4 4 48
17) 7 6 3 7 6 4 4 5 48
18) 7 6 3 7 6 5 4 4 48
19) 7 7 3 4 6 5 4 6 48
20) 7 7 3 4 6 6 4 5 48
21) 7 7 3 5 6 4 4 6 48
22) 7 7 3 5 6 6 4 4 48
23) 7 7 3 6 6 4 4 5 48
24) 7 7 3 6 6 5 4 4 48

Damit ist eine Klasse arbeitsteilig gut beschäftigt. – Ergebnis: Alle Zahlen sind durch 36 teilbar. Das macht neugierig.

Im nächsten Schritt lassen sich die Zahlen auf Teilbarkeit untersuchen.
Durch 36 sind Zahlen teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar sind.

- Die entstehenden Zahlen sind immer durch 4 teilbar, weil 48 durch 4 teilbar ist (und die Hunderter und Tausender… sowieso).
- Die Quersumme aller entstehenden Zahlen beträgt 54. Die ist durch 9 teilbar, also auch die zehnstelligen Zahlen.
- Damit sind alle vorkommenden zehnstelligen Zahlen sowohl durch 4 als auch 9 teilbar, also auch durch 36.

Zusatz: Man könnte sogar alle 8 Ziffern vor der 48 wild durcheinanderwirbeln. Alle entstehenden Zahlen wären immer noch durch 36 teilbar, weil die Teilbarkeitsargumente von oben dann immer noch gelten.