Ungerechtigkeit beim Fußballspiel?

ⓘ**Infos:** www.mued.de

Ein-Euro-Münze Vorderseite

Österreich

Italien

Belgien

Vor dem Anpfiff eines Fußballspiels entscheidet der Münzwurf durch den Schiedsrichter darüber, wer die Seiten wählen darf (der Gewinner) und wer Anstoß hat. Doch ist diese Entscheidung fair? Bereits kurz nach der Einführung der Euro-Münzen gab es den Verdacht, dass die Wahrscheinlichkeit von "Kopf" und "Zahl" wegen der unterschiedlichen Gewichtsverteilung auf den beiden Seiten nicht gleich sei.
Jemand behauptet, dass "Kopf" zumindest bei einigen Euro-Münzen weniger häufig oben liegt, weil die Kopfseite schwerer sei.

1. Diese Behauptung soll in einem ersten Experiment mit 50 Würfen (a), in einem zweiten (b) mit 100 Würfen getestet werden.
   Formuliert Hypothese, Gegenhypothese und legt eure Entscheidungskriterien für $\alpha = 5\ \%$ fest. Führt die Versuche aus und entscheidet.

2. Aus den vielen Versuchen in 1 lässt sich die Wahrscheinlichkeit für "Kopf oben" schätzen. Addiert die Ergebnisse im Kurs und schätzt die Wahrscheinlichkeit.

Weitere Münzwurf-Experimente mit anderen Münzen

Untersucht bei den folgenden Experimenten, ob die Ergebnisse signifikant (auf dem 5 %-Niveau) dafür sprechen, dass Euro-Münzen nicht fair sind – jeweils mit einem zweiseitigen Test, da unklar ist, welche Seite dominieren könnte.

1. Wurfexperimente mit drei verschiedenen Ein-Euro-Münzen

Land	Stichprobenumfang	Anteil "Kopf"
OE	400	0.490
IT	150	0.473
FR	150	0.527

2. Kreiselexperimente mit zwei Ein-Euro-Münzen (Serie 1) und zwei anderen Ein-Euro-Münzen (Serie 2)

Land	Stichprobenumfang	Anteil "Kopf"
OE (1)	100	0.470
IT (1)	100	0.170
OE (2)	200	0.395
IT (2)	100	0.230

www.statistik.tuwien.ac.at/oezstat/ausg021/.../futschik.ps

3. Warschau – Vom Euro dürfen wir einiges erhoffen, doch in einem Punkt sollten wir ihm misstrauen. Wer eine Euro-Münze auf dem Tisch zum Kreiseln bringt, um nach dem Motto "Kopf oder Zahl" eine wichtige (womöglich kostspielige) Entscheidung herbeizuführen, der sollte wissen, dass der Euro kein gerechter Richter ist. Das haben die polnischen Mathematiker Tomasz Gliszczynski und Waclaw Zawadowski herausgefunden. Verwandte aus Belgien hatten ihnen vor Weihnachten die ersten neuen Münzen mitgebracht. Gliszczynski, der an der Akademia Podlaska im ostpolnischen Siedlce Statistik lehrt, und seine Studenten warfen die Ein-Euro-Münze 250 Mal. 140 Mal zeigte sie den massigen Kopf des belgischen Königs Albert, nur 110 Mal die Zahl.

aus: "Die Welt" am 3. Januar 2002 unter dem Titel "Abschied vom Kopf- oder Zahlspiel"

4. Ein Test im Büro der "Times" ergab ähnliches wie bei der belgischen Münze (s. unter 3.) für die deutsche Ein-Euro-Münze, sowohl beim Rotieren auf dem Tisch als auch beim Wurf in die Luft: Der Adler zeigte sich 60-mal bei 100 Luftwürfen und 54-mal beim ebenso häufigen Rotieren auf einer ebenen Oberfläche.

nach: www.math.uni-leipzig.de/~tschmidt/SS06_Stat1_blatt4.pdf, Quelle: www.kc3.co.uk/dt/Currency.htm

1. H_1: Die Kopfseite liegt beim Münzwurf seltener oben als die Zahlseite; $p < 0,5$, linksseitig
   H_0: Kopf- und Zahlseite sind gleich häufig; $p = 0,5$
   a) $n = 50$; $\alpha = 5$ %
   b) $n = 100$; $\alpha = 5$ %
   X: Zahl der Ausfälle mit "Kopf oben"

   a) $P(X \le 18) \approx 3,2$ %; $P(X \le 19) \approx 5,9$ %
      $V = \{0, 1, \ldots, 18\}$
   b) $P(X \le 41) \approx 4,4$ %; $P(X \le 42) \approx 6,7$ %
      $V = \{0, 1, \ldots, 41\}$

   Liegt die Anzahl der Ausfälle mit "Kopf oben" in V, so wird H_0 verworfen und H_1 akzeptiert: Kopf erscheint seltener als Zahl bei gegebenem α.
   Liegt die Anzahl nicht in V, so wird H_0 nicht verworfen, H_1 nicht akzeptiert: Die Münze gilt weiterhin als fair. Das ist allerdings durch den Versuch nicht (statistisch) begründet.

2. Sind insgesamt viele Versuche durchgeführt worden, so kann aus der relativen Häufigkeit von "Kopf oben" die Wahrscheinlichkeit geschätzt werden.
   - Das geht als grobe Schätzung ohne Theoriehintergrund.
     Liegt der Wert für p nicht sehr nahe bei 50 %, so sollte der DFB angeschrieben werden!
   - Ist im Kurs Schätzen (i. d. R. am Thema Demoskopie) behandelt worden, kann ein Konfidenzintervall für den Parameter p berechnet werden; hier mit der vereinfachten Ungleichung, da p zwischen 30 % und 70 % zu erwarten ist.
     $P\left(|r - p| \le 1,96 \cdot \sqrt{\frac{r \cdot (1-r)}{n}}\right) \approx 95$ %
     mit r: relative Häufigkeit, n: Gesamtzahl der Versuche, p: gesuchte WK
     Liegt 50 % nicht im Konfidenzintervall für p, so …

Zu 1 und 2 können auch die beidseitigen Verwerfungsbereiche konkret berechnet werden.

1. Zu prüfen ist, ob die Ergebnisse im beidseitigen Verwerfungsbereich liegen, also über der 97,5 %- oder unter der 2,5 %-Grenze.
   - OE: $n = 400$, $k = 0{,}49 \cdot 400 = 196$; $p = 0{,}5$ (H_0)
     $P(X \leq 196) \approx 36{,}3$ %
     Die österreichische Euromünze zeigt keine signifikante Abweichung zu $p = 0{,}5$.
   - IT: $n = 150$; $k = 0{,}473 \cdot 150 \approx 71$, $p = 0{,}5$
     $P(X \leq 71) \approx 28{,}4$ %
     Die italienische Euromünze zeigt keine signifikante Abweichung zu $p = 0{,}5$.
   - FR: $n = 150$; $k = 0{,}527 \cdot 150 \approx 79$, $p = 0{,}5$
     $P(X \leq 79) \approx 76{,}9$ %
     Die französische Euromünze zeigt keine signifikante Abweichung von der 50 %-Hypothese.

2. - OE(1): $n = 100$; $k = 0{,}47 \cdot 100 = 47$, $p = 0{,}5$
     $P(X \leq 47) \approx 30{,}9$ %
     Die österreichische Euromünze zeigt keine signifikante Abweichung zu $p = 0{,}5$.
   - IT(1): $n = 100$; $k = 0{,}17 \cdot 100 = 17$, $p = 0{,}5$
     $P(X \leq 17) \approx 6{,}5 \cdot 10^{-12} \ll 2{,}5$ %
     Die italienische Münze zeigt in diesem Versuch eine stark signifikante Abweichung zur Gleichverteilungshypothese nach unten.
   - OE(2): $n = 200$; $k = 0{,}395 \cdot 200 = 79$, $p = 0{,}5$
     $P(X \leq 79) \approx 0{,}18$ % $< 2{,}5$ %
     Die österreichische Münze zeigt in diesem Versuch eine stark signifikante Abweichung zur Gleichverteilungshypothese nach unten.
   - IT(2): $n = 100$; $k = 0{,}230 \cdot 100 = 23$, $p = 0{,}5$
     $P(X \leq 23) \approx 2{,}8 \cdot 10^{-8} \ll 2{,}5$ %
     Die italienische Münze zeigt in diesem Versuch eine stark signifikante Abweichung zur Gleichverteilungshypothese nach unten.

3. H_1: Die Kopfseite liegt beim Münzwurf seltener oder häufiger oben als die Zahlseite; $p < 0{,}5$ oder $p > 0{,}5$
   H_0: Kopf- und Zahlseite sind gleich häufig; $p = 0{,}5$
   X: Zahl der Ausfälle mit "Kopf oben"
   $n = 250$, $\alpha = 5\ \%$,
   zweiseitiger Test:
   $P(X \leq 109) \approx 0{,}0248$; $P(X \leq 110) \approx 0{,}033$; $P(X \leq 139) \approx 0{,}967$; $P(X \leq 140) \approx 0{,}9751$;
   $V = \{0, 1, ..., 109, 141, ..., 250\}$
   Liegt die Anzahl der Ausfälle mit "Kopf oben" in V, so wird H_0 verworfen und H_1 akzeptiert. Hier liegt die Anzahl nicht in V, also wird H_0 nicht verworfen, H_1 nicht akzeptiert.
   Da die Entscheidung sehr knapp ist, sollten weitere Experimente mit größerem n durchgeführt werden.

4. Testablauf wie in 3, nur mit $n = 100$
   Hier wurde statt "Kopf oben" die Zahl der Ausfälle mit "Adler oben" gezählt.
   $P(X \leq 39) \approx 0{,}018$; $P(X \leq 40) \approx 0{,}028$
   $P(X \leq 59) \approx 0{,}972$; $P(X \leq 60) \approx 0{,}982$
   $V = \{0, 1, \ldots, 39, 61, 62, \ldots, 100\}$
   Da 60 bzw. 54 nicht in V, wird H_0 nicht verworfen, H_1 nicht akzeptiert. Da die Entscheidung sehr knapp ist (beim Werfen), sollte das Experiment mit größerem n wiederholt werden.

ZUM ABDM 08/2017

Da wird in sehr vielen Fußballspielen immer wieder per Münzwurf über die Seite und den Anstoß entschieden und keine/r weiß, ob die Münze fair ist.
Das sollte endlich geklärt werden – durch Testen von deutschen Euromünzen und, wenn viele Versuchsergebnisse vorliegen, durch Schätzen der Wahrscheinlichkeit von "Kopf oben".
Sollte das Ergebnis von 50 % abweichen, informieren Sie den DFB.
Um einen tatsächlichen gut gesicherten Schätzwert zu bekommen, schicken Sie die Wurfergebnisse Ihres Kurses bitte auch an mued@mued.de. Wenn wir viele Daten zu "Kopf oben" für deutsche Ein-Euro-Münzen erhalten, dann ließe sich die Ausgangsfrage des Arbeitsblattes zufriedenstellend beantworten.