Das optimale Sektglas

Infos: www.mued.de

Frage: Wie groß kann das Volumen des Sektglases maximal werden, wenn der Materialverbrauch nicht verändert wird?

Vorspeise:
- Vernachlässigt werden kann: ____.
- Form des vorliegenden Glases: ______________________________________.
- Um das verbrauchte Material zu berechnen, muss mathematisch gesehen __________________________________ bestimmt werden.
- Um zu berechnen, wie viel hineinpasst, muss mathematisch gesehen ______________________ bestimmt werden.
- Gemessen: ______________________________
  ____
- Berechnet: ______________________________
  ____

Hauptgericht:
- Vereinfachung: Stellt euch das Glas als Spitzkegel vor!
- Überlegt euch, was genau maximal werden soll und was unverändert bleibt:

  Maximal wird: ___________________________

- Unverändert bleibt: ________________________
- Erinnert euch an das Schema zur Lösung von Extremwertproblemen und wendet es an.
- Wie war das mit einer Wurzelfunktion noch mal?
- Berechnet das optimierte Volumen; ist es nun wirklich größer als vorher? Überprüft, ob euer "Materialverbrauch" konstant geblieben ist.

Dessert (für den, der schnell is(s)t):
- Bastelt aus einem Blatt Papier euer "optimales" Sektglas.

Einige Hinweise

Materialbedarf:
– Plastiksektgläser (4 Stück gibt's bei Tedi oder ähnlichen Billigläden für 1 Euro).
– Lineale
– Formelsammlung
– Taschenrechner

Idee:
Die SuS optimieren das vorliegende Sektglas, indem sie zunächst den Materialverbrauch möglichst genau annähern und dann davon ausgehend das maximale Volumen bestimmen.

Vereinfachung:
Das Sektglas muss unten möglichst spitz zulaufen, damit man sich den Kelch als Kegel vorstellen kann. Der Fuß ist beim Materialbedarf zu vernachlässigen, da ein optimiertes Glas ja ebenfalls einen Fuß haben muss. Die Berechnungen beziehen sich daher nur auf den oberen Teil des Glases, in den der Sekt eingeschüttet wird.

Einstieg
Siehe den Komik unten.

Mögliches Ergebnis

Vorspeise:
– Vernachlässigt werden kann: der Fuß des Glases.
– Form des vorliegenden Glases: Kegelstumpf.
– Um das verbrauchte Material zu berechnen, muss mathematisch gesehen die Mantelfläche des Kegelstumpfes bestimmt werden.
– Um zu berechnen, wie viel hineinpasst, muss mathematisch gesehen das Volumen des Kegelstumpfes bestimmt werden.
– Gemessen: r_1 = 2,7 cm, r_2 = 1,1 cm kleiner und großer Radius
  s = 12,7 cm Mantelkante
  h = 12,6 cm Höhe
– Berechnet: V = 151,34 cm³ ≈ 151 cm³ (genau: V = 150 cm³)
  M = 151,61 cm² ≈152 cm²

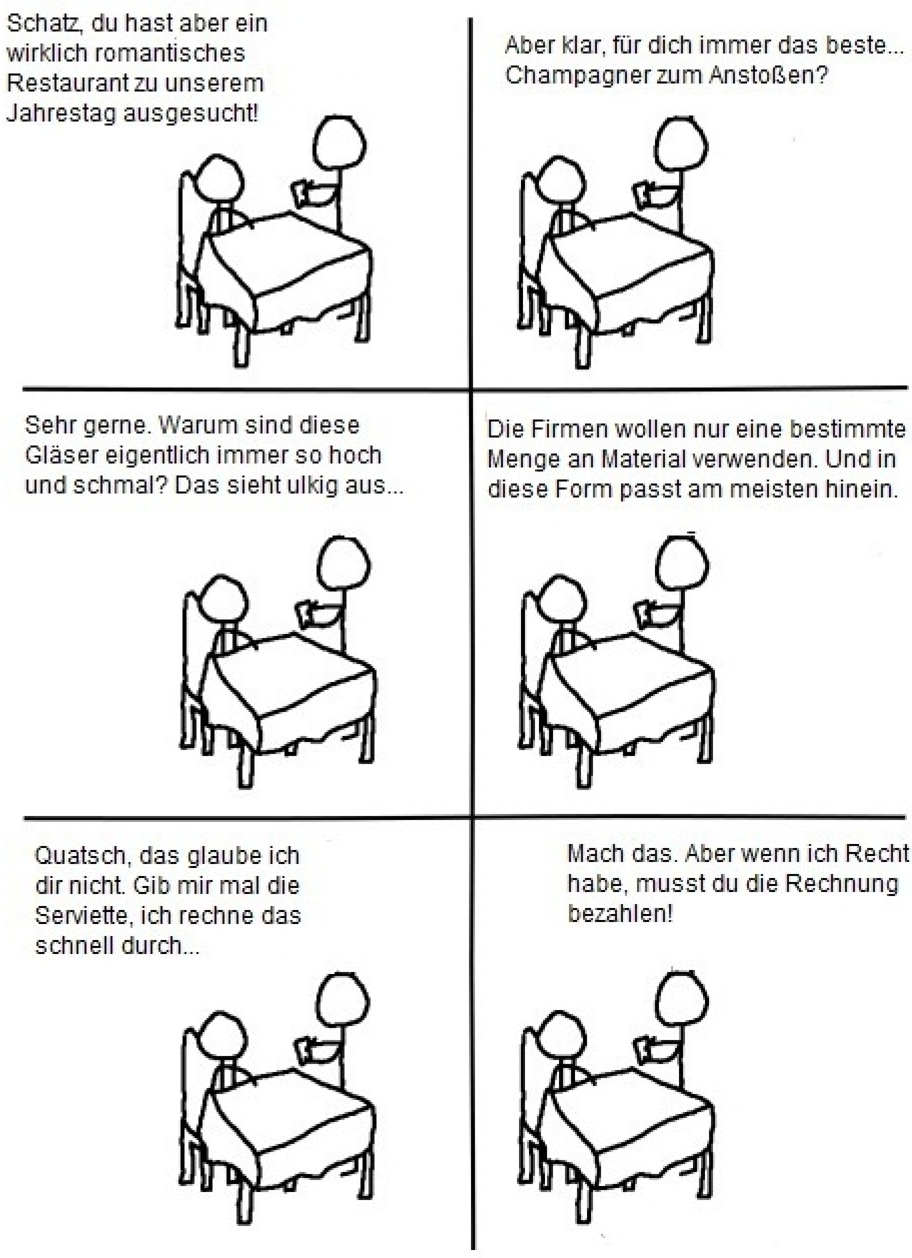
Hauptgericht:
– Vereinfachung: Wir stellen uns ab jetzt das Glas als Spitzkegel vor!
– Überlegt euch, was genau maximal werden soll und was unverändert bleibt:
  Maximal wird: das Volumen
  Unverändert bleibt: die Mantelfläche
– Erinnert euch an das Schema zur Lösung von Extremwertproblemen und wendet es an.
– Wie war das mit einer Wurzelfunktion noch mal?
– Berechnet das optimierte Volumen; ist es nun wirklich größer als vorher? Überprüft, ob euer "Materialverbrauch" konstant geblieben ist.

Optimierung des Glases:

(1) Extremalbedingung: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ soll maximal sein
(2) Nebenbedingung: $M = \pi rs = 152$
(3) Zielfunktion: Über Pythagoras ergibt sich $h^2 + r^2 = s^2$, mit der Nebenbedingung dann $h = \sqrt{\frac{152^2}{\pi^2 r^2} - r^2}$. Setzt man h in V ein und zieht alles unter die Wurzel, dann bleibt: $V(r) = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 152^2 r^2 - \frac{1}{9}\pi^2 r^6}$
(4) Lösung mit dem Graphen im GTR: Max-Ablesung.
Berechnung: Da beim Quadrieren der Funktion die Extremstellen erhalten bleiben, braucht nur das Polynom $f(r) = V^2(r)$ untersucht werden – für den Grundkurs.
Im LK kann die Funktion abgeleitet und die Zählerfunktion auf Nullstellen untersucht werden.
Extremstellen: $r_1 = 0$; $r_2 = -5{,}3$; $r_3 = 5{,}3$
Nur r_3 ist im Sachkontext sinnvoll; durch Überprüfung der hinreichenden Bedingung ergibt sich: Maximum bei $\underline{r_3 = 5{,}3\text{ cm}}$
(5) Dann ist $\underline{h = 7{,}4\text{ cm}}$
und $\underline{V = 217{,}7\text{ cm}^3}$
Einsetzen in die Formel für die Mantelfläche: $M = 152\text{ cm}^2$ (als Überprüfung)
(6) Definitionsbereich: Sowohl r als auch h müssen größer gleich Null sein
(7) Randextrema: Für $r = 0$: $V = 0$
Für $h = 0$: $V = 0$

Überprüfung an der Realität:
Das Glas hat damit einen größeren Durchmesser als die Höhe → oben größere Oberfläche → realistisches Ergebnis

Comic zum Stundeneinstieg:



Bei dieser Stunde (am besten Doppelstunde) geht es darum, eine Extremwertaufgabe aus aktuellem Anlass zu behandeln: Die Abiturienten haben (in NRW Ende Mai) ihre Abi-Noten erhalten und damit in der Regel das Abitur sicher bestanden. Das wird gerne mit Sekt gefeiert. Dafür kann die Q1 ihnen das Sektglas optimieren. Es soll bei gleichem Glasaufwand möglichst viel Sekt reinpassen…