Elefantenvogel-Ei

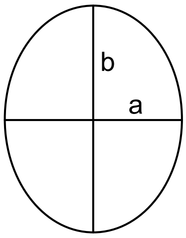
Infos: www.mued.de

Dieses Ei ist mehr als 100 Mal so groß wie ein Hühnerei und 30 cm lang. Es stammt von einem Elefantenvogel.

Westfälische Nachrichten, 29.03.2013

Informationen:

- Ein normales Hühnerei aus meinem Kühlschrank ist 6 cm lang und wiegt 75 g.
- Das Ei lässt sich annähern durch eine Halbkugel und eine Halbellipse, wobei der Kugelradius etwa 40 % der Ei-Länge ausmacht.
- Formel für das Volumen einer Ellipse, die um die Achse b rotiert: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot a^2 \cdot b$
- Näherungsformel für die Ellipsoid-oberfläche:
  $O = 4\pi \cdot \left(\frac{a^{3,2} + 2\cdot(a\,b)^{1,6}}{3}\right)^{0,625}$



1. Nimm an, das normale Hühnerei und das Elefantenvogel-Ei sind ähnlich.
   Um welchen Faktor ist dann das Elefantenvogel-Ei größer als das Hühnerei
   a) beim Volumen,
   b) bei der Schalenfläche?
   Tipp: Berechne nicht die Größen, sondern nur die Faktoren.

2. a) Mache eine Skizze zum Längsquerschnitt des Eies und markiere darin die Strecken zu r, a und b.
   b) Welche Werte haben die drei Längen für das Hühnerei, welche für das Elefantenvogel-Ei?

3. Berechne Volumen und Oberfläche für das
   a) Hühnerei,
   b) Elefantenvogel-Ei.

4. Vergleiche die Größen und überprüfe die Werte in 1.

5. a) Passt die Gewichtsangabe oben in etwa zum Volumen?
   b) Welches Gewicht bringt das Elefantenvogel-Ei etwa auf die Waage?

1. Bei ähnlichen Körpern verändern sich alle Längen proportional. Das heißt: Vergrößert man den Radius r um einen Faktor, so ändern sich auch a und b um denselben Faktor f.
   a) Das Volumen der Halbkugel und der Halbellipse ändert sich dann um f^3.
   Das normale Hühnerei ist insgesamt 6 cm lang, das Elefantenvogel-Ei 30 cm lang, dazwischen liegt der Faktor 5. Also ist das Volumen des Elefantenvogel-Eies 125-mal so groß wie das des Hühnereies.

   Zur Erläuterung des Faktors f^3:

   $$V_{\text{Halbkugel, groß}} = \frac{2}{3}\,\pi\,(r \cdot f)^3 = \frac{2}{3}\,\pi \cdot r^3 \cdot f^3 = V_{\text{Halbkugel, klein}} \cdot f^3$$

   $$V_{\text{Halbellipse, groß}} = \frac{2}{3}\,\pi\,(a \cdot f)^2 \cdot b \cdot f = \frac{2}{3}\,\pi \cdot a^2 \cdot b \cdot f^3 = V_{\text{Halbellipse, klein}} \cdot f^3$$

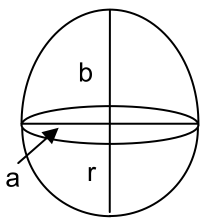
   b) Die Oberfläche ändert sich um f^2.
   Da $f = 5$, wird die Oberfläche des Elefantenvogel-Eies 25-mal so groß sein wie die des Hühner-Eies.

   Zur Erläuterung des Faktors f^2:

   $$O_{\text{Halbkugel, groß}} = 2\,\pi\,(r \cdot f)^2 = 2\,\pi \cdot r^2 \cdot f^2 = O_{\text{Halbkugel, klein}} \cdot f^2$$

   $$\begin{aligned} O_{\text{Halbellipse, groß}} &= 2\,\pi \cdot \left(\frac{(a \cdot f)^{3,2} + 2 \cdot (a \cdot f \cdot b \cdot f)^{1,6}}{3}\right)^{0,625} \\ &= 2\,\pi \cdot \left(\frac{a^{3,2} \cdot f^{3,2} + 2 \cdot (a\,b)^{1,6} \cdot f^{3,2}}{3}\right)^{0,625} \\ &= 2\,\pi \cdot \left(\frac{a^{3,2} + 2 \cdot (a\,b)^{1,6}}{3} \cdot f^{3,2}\right)^{0,625} \\ &= 2\,\pi \cdot \left(\frac{a^{3,2} + 2 \cdot (a\,b)^{1,6}}{3}\right)^{0,625} \cdot f^{3,2 \cdot 0,625} \\ &= O_{\text{Halbellipse, klein}} \cdot f^2 \end{aligned}$$

2. a)



   b) Hühnerei: r = 2,4 cm; a = 2,4 cm; b = 3,6 cm
   Elefantenvogel-Ei: r = 12 cm; a = 12 cm; b = 18 cm

   Die Werte sind jeweils so gewählt, damit r = 40 % · Gesamtlänge und r + b = Gesamtlänge gilt.

3. a) $V_{\text{Hühnerei}} = \frac{2}{3}\,\pi \cdot 2{,}4^3 + \frac{2}{3}\,\pi \cdot 2{,}4^2 \cdot 3{,}6$

$\approx 72{,}4$

$O_{\text{Hühnerei}} = 2\,\pi \cdot 2{,}4^2 + 2\,\pi \cdot \left(\frac{2{,}4^{3{,}2} + 2 \cdot (2{,}4 \cdot 3{,}6)^{1{,}6}}{3}\right)^{0{,}625}$

$\approx 84{,}9$

Das Hühnerei hat ein Volumen von rund 72,4 cm³ und eine Oberfläche von etwa 84,9 cm².

b) $V_{\text{Elefantenvogel-Ei}} = \frac{2}{3}\,\pi \cdot 12^3 + \frac{2}{3}\,\pi \cdot 12^2 \cdot 18$

$\approx 9047{,}8$

$O_{\text{Elefantenvogel-Ei}} = 2\,\pi \cdot 12^2 + 2\,\pi \cdot \left(\frac{12^{3{,}2} + 2 \cdot (12 \cdot 18)^{1{,}6}}{3}\right)^{0{,}625}$

$\approx 2122{,}6$

Das Elefantenvogel-Ei hat ein Volumen von rund 9048 cm³ und eine Oberfläche von etwa 2123 cm².

4. Volumenfaktor: $\frac{9047{,}8\text{ cm}^3}{72{,}4\text{ cm}^3} \approx 124{,}97 \approx 125$

Oberflächenfaktor: $\frac{2122{,}6\text{ cm}^3}{84{,}9\text{ cm}^3} \approx 25{,}00 \approx 25$

Die beiden Faktoren in 1 treffen hier zu.

5. a) Ein Ei ist etwas schwerer als Wasser, hat also pro cm³ eine Masse knapp über 1 g.

Bei 1 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ käme 72,4 g heraus (s. 3 a). 75 g ist etwas mehr – das passt.

b) 72,4 cm³ – 75 g

1 cm³ – $\frac{75}{72{,}4}$ g

9047,8 cm³ – $\frac{75 \cdot 9047{,}8}{72{,}4}$ g ≈ 9373 g ≈ 9,4 kg

oder kurz mit dem Faktor aus 1):

$m_{\text{Elefantenvogel-Ei}} = 75\text{ g} \cdot 125 \approx 9375\text{ g} \approx 9{,}4\text{ kg}$

Das Elefantenvogel-Ei hat eine Masse von rund 9,4 kg.

ZUM ARBEITSBLATT DES MONATS JULI 2013

Das **Arbeitsblatt des Monats Juli** beschäftigt sich mit dem "Elefantenvogel-Ei". Am Elefantenvogel-Ei trainieren Schüler/innen die Nutzung von (auch komplizierten) Formeln, argumentieren für Faktoren bei Vergrößerungen ähnlicher Körper bei Fläche und Volumen und vergleichen mit den konkreten Ergebnissen. Das kann man gut niveaudifferenziert bearbeiten lassen. Der Umgang mit dem TR wird ernsthaft geübt. Das Ergebnis (Flächenfaktor f² und Volumenfaktor f³) bleibt hoffentlich nachhaltig haften, weil das Ei einen anschaulichen Anlass für die Rechnerei liefert und weil sich das Ergebnis auf verschiedenen Wegen ergibt.

Das alles passt gut in die Einführungsphase der Oberstufe.