Selbstdiagnosebogen zu Exponentialfunktionen

A) Kreuze deine Einschätzung an.

Ich kann	Da bin ich mir sicher.	Da bin ich fast sicher.	Da bin ich unsicher.	Das kann ich noch nicht.
1. zu einem Wachstumsprozentsatz den Wachstumsfaktor bestimmen und umgekehrt.	☐	☐	☐	☐
2. zu einem Anfangskapital und Zinssatz das Endkapital bestimmen.	☐	☐	☐	☐
3. aus zwei Daten einer Größe den Wachstumsfaktor und -prozentsatz berechnen.	☐	☐	☐	☐
4. charakteristische Eigenschaften von linearen bzw. Exponentialfunktionen erkennen und benennen.	☐	☐	☐	☐
5. lineare und exponentielle Funktionsgleichungen aufstellen und die Grafen skizzieren.	☐	☐	☐	☐
6. Exponentialgleichungen lösen.	☐	☐	☐	☐

B) Zur Überprüfung deiner Selbsteinschätzung löse die Aufgaben im Selbsttest.

C) Bitte kreuze danach noch einmal die Liste oben in anderer Farbe an.

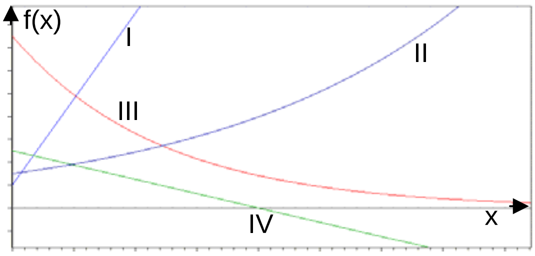
D) Wenn du nach dieser Überprüfung noch mehrere Kreuzchen in der dritten oder vierten Spalte hast, musst du etwas unternehmen.
- Du kannst in deinen eigenen Unterlagen, den Themenmappen, nachsehen.
- Du kannst in deinem aktuellen oder früheren Mathe-Büchern nachsehen.
- Du kannst jemanden fragen, der sich auskennt, und ein Erklär- und Übungstreffen ausmachen.
- Du kannst auf Selgo nachsehen, ob es zu dem Thema Material gibt.
- Du kannst im Schrank des Wissens auf der RHG-Homepage nachsehen.
- Häufig findest du auch im Internet Erklärungen und Übungen.
- Dir fallen bestimmt noch weitere Möglichkeiten ein, die Verantwortung für dein Lernen selber zu übernehmen.

E) ✎ Notiere hier, was du dir vornimmst:

Selbsttest zu Exponentialfunktionen

Passende formale Aufgaben	Passende Anwendungsaufgaben
1. Bestimme den Wachstumsfaktor und -prozentsatz a) p % = 7 % b) p % = -4 % c) a = 1,025 d) a = 0,997 e) Notiere eine Formel für den Zusammenhang von Wachstumsfaktor und -prozentsatz.	1. Bestimme den Wachstumsprozentsatz und -faktor. a) Ein Kapital wird mit 4,2 % pro Jahr verzinst. b) Eine Pflanze nimmt von Jahr zu Jahr jeweils auf das 1,5-fache zu. c) Eine radioaktive Substanz zerfällt mit 0,8 % pro Tag. d) Wegen der Inflation nimmt der Geldwert pro Jahr auf rund 97 % ab. e) Beschreibe: Wie erkennst du am Wachstumsfaktor, ob die beschriebene Größe zu- oder abnimmt?
2. a) K_0 = 500 €, t = 5 Jahre; p % = 3,5 % pro Jahr b) K_0 = 850 €; t = 12 Jahre; p % = -1,5 % pro Jahr c) Notiere eine Formel für die Berechnung in a) und b).	2. a) In einem Sparvertrag legst du 750 € zu einem Jahreszinssatz von 3,5 % für 5 Jahre fest. Wie viel erhältst du am Ende? b) Eine andere Bank verspricht statt der Bedingungen in a) 2,7 % für 3 Jahre, für die Restzeit 4,5 %. Sind die Konditionen (Bedingungen) besser? c) Wie lautet die allgemeine Funktionsgleichung für exponentielle Funktionen? Erläutere die Bedeutung aller vorkommenden Variablen.
3. Bestimme die Funktionsvorschrift einer exponentiellen Funktion, deren Graf durch die beiden angegebenen Punkte geht. <table><tr><td></td><td colspan="2">a</td><td colspan="2">b</td><td colspan="2">c</td><td colspan="2">d</td></tr><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>11</td><td>0</td><td>20</td><td>5</td><td>15</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>5</td><td>5,3</td><td>17</td><td>22,3</td><td>113</td><td>50</td><td>23</td><td>10</td></tr></table>	3. a) Ein Kapital von 1000 € ist nach einem Jahr 1048 € wert. Mit welchem Zinssatz wurde es angelegt? b) Ein 10 Jahre alter Baum ist 7,30 m hoch; mit 25 Jahren ist er 12,05 m hoch. Um welchen Prozentsatz wächst er pro Jahr? Wie groß war er beim Einpflanzen? c) Beurteile: Darf so einfach gerechnet werden wie in b)? d) Ein Kapital von 500 € wird für 3 Jahre mit 3,5 % verzinst, für weitere 4 Jahre mit 4,5 %. Eine andere Sparkasse bietet dasselbe Endkapital bei gleich bleibendem Jahreszinssatz an. Wie hoch ist er?

4\. a) Erläutere, welche Grafen zu linearen, welche zu Exponentialfunktionen gehören.



b) Begründe: Was weißt du jeweils sicher über die Größe von a und b in den vier Fällen?

Hinweis zur Verwendung von a und b:
Lineare Funktion
$f(x) = a\,x + b$
Exponentialfunktion
$f(x) = b \cdot a^x$

4\. Erläutere: Welche der folgenden Größenbeschreibungen passt zu welchem Grafen links? Begründe: Eine Beschreibung passt nicht ganz.

a) Bei 15° C steht der "Quecksilberfaden" an einem Thermometer 20 mm hoch. Er verlängert sich um jeweils 15 mm, wenn sich die Temperatur um 1° C erhöht.
b) Ein Haushaltsgerät kostet neu 150 €. Pro Jahr verliert es 8 % seines Zeitwertes.
c) Anfangs besaß er 50 €, gab aber pro Tag 2,5 € aus.
d) Eine 30 cm lange Alge vergrößert ihre Länge täglich um 5 %.
e) Eine 50 cm lange Kerze brennt gleichmäßig ab mit 2,5 cm pro Stunde.

5\. Notiere die Funktionsgleichung und skizziere den zugehörigen Grafen.
a) $f(x) = 1{,}5\,x - 4$
b) $f(x) = 2 \cdot 1{,}2^x$
c) Eine lineare Funktion beginnt bei 8 und nimmt in 8 Schritten um 12 ab.
d) Eine Exponentialfunktion, die mit dem Wert 10 startet, nimmt in 3 Schritten um 27 % ab.

5\. a) Notiere zu den Aufgaben 4.a) bis e) passende Funktionsgleichungen.
b) Die Zahl der Landwirte in Frankreich nahm von 1968 bis 2000 von 3 Millionen um drei Viertel ab. Notiere lineare und exponentielle Funktionen zur Beschreibung und prognostiziere Werte für 2030.
c) In dem Zeitraum aus b) nahm die Zahl der Beamten, die für die Landwirte zuständig waren, von 30 000 um 6000 zu. Verfahre wie in b).
d) Löse zeichnerisch und rechnerisch: Wann gibt es nach den linearen Prognosen für jeden Landwirt einen Beamten?

6\. Löse die Gleichungen:
a) $2^x = 64$
b) $3 \cdot 4^x = 9 \cdot 0{,}8^x$
c) $20 \cdot 1{,}02^x = 10 \cdot 1{,}04^x$

6\. a) Bearbeite 5.d) für die exponentiellen Prognosen.
Landwirte-Funktion:
$f(x) = 3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}9576^x$
Beamten-Funktion:
$f(x) = 30\,000 \cdot 1{,}0057^x$
b) Überlege zu den Gleichungen links passende Realzusammenhänge

Formale Aufgaben

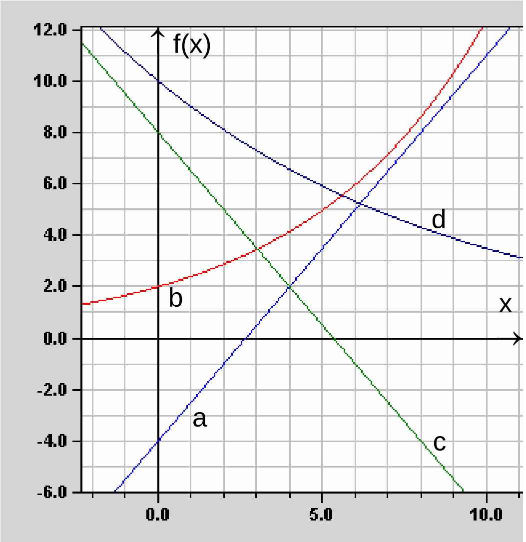
1. a) $a = 1{,}07$
   b) $a = 0{,}96$
   c) $p\ \% = 2{,}5\ \%$
   d) $p\ \% = -0{,}3\ \%$
   e) $a = 1 + \frac{p}{100}$

2. a) $K_5 = 500\ € \cdot 1{,}035^5 \approx 593{,}84\ €$
   b) $K_{12} = 850\ € \cdot 0{,}985^{12} \approx 709{,}01\ €$
   c) $K_t = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^t$

3. a) $5 \cdot a^1 = 5{,}3 \Rightarrow a = 1{,}06 \Rightarrow p\ \% = 6\ \%$
   $f(x) = 5 \cdot 1{,}06^x$
   b) $17 \cdot a^{11} = 22{,}3 \Rightarrow a = \sqrt[11]{\frac{22{,}3}{17}} = 1{,}025 \Rightarrow p\ \% = 2{,}5\ \%$
   $f(x) = 17 \cdot 1{,}025^x$
   c) $113 \cdot a^{20} = 50 \Rightarrow a = \sqrt[20]{\frac{50}{113}} \approx 0{,}960 \Rightarrow p\ \% = -4{,}0\ \%$
   $f(x) = 113 \cdot 0{,}96^x$
   d) a-Berechnung mit verschobenem x-Wert
   Ich wähle x = 5 als Anfangspunkt, dann wird aus x = 15 die 10.
   $23 \cdot a^{10} = 10 \Rightarrow a = \sqrt[10]{\frac{10}{23}} \approx 0{,}920 \Rightarrow p\ \% = -8{,}0\ \%$
   b-Berechnung mit x-Werten der Tabelle
   $b \cdot 0{,}92^5 = 23 \Rightarrow b \approx 34{,}9$ [oder: $b \cdot 0{,}92^{15} = 10 \Rightarrow b \approx 34{,}9$]
   Funktionsvorschrift
   $f(x) = 34{,}9 \cdot 0{,}92^x$
   Oder die Lösung beginnt mit 2 Gleichungen:
   I: $b \cdot a^5 = 23$ und II: $b \cdot a^{15} = 10$
   Die Division II : I führt dann wie oben auf $a^{10} = \frac{10}{23}$ …

4. a) Lineare Funktionen: I, IV, da die Grafen Geraden sind.
   Exponentialfunktionen: II, III, da die Grafen gekrümmt sind.
   b) I: $a > 0$, da die Gerade steigt.
   II. $a > 1$, da der Exponentialgraf steigt.
   III: $0 < a < 1$, da der Exponentialgraf fällt
   IV: $a < 0$, da die Gerade fällt.
   b ist in allen vier Beispielen größer als Null.
   $b_{III} > b_{IV} > b_{II} > b_I$

5. a), b)



c) $a = \frac{-12}{8} = -1{,}5$

$f(x) = -1{,}5\,x + 8$

d) $a = \sqrt[3]{1 - 27\,\%} = \sqrt[3]{0{,}73} \approx 0{,}9$

$f(x) = 10 \cdot 0{,}9^x$

6. a) $2^6 = 64$, also $x = 6$

b)
$$\begin{aligned} 3 \cdot 4^x &= 9 \cdot 0{,}8^x && \mid :3 \quad \mid : 0{,}8^x \\ \left(\frac{4}{0{,}8}\right)^x &= 3 \\ 5^x &= 3 && \mid \log(\,) \\ x \cdot \log 5 &= \log 3 && \mid : \log 5 \\ x &= \frac{\log 3}{\log 5} \\ x &\approx 0{,}68 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 20 \cdot 1{,}02^x &= 10 \cdot 1{,}04^x && \mid :10 \quad \mid : 1{,}02^x \\ 2 &= \left(\frac{1{,}04}{1{,}02}\right)^x && \mid \log(\,) \\ \log 2 &= x \cdot \log \frac{1{,}04}{1{,}02} && \mid : \log \frac{1{,}04}{1{,}02} \\ x &\approx 35{,}7 \end{aligned}$$

Anwendungsaufgaben

1. a) $a = 1{,}042$
   b) $a = 1{,}5 \Rightarrow p\,\% = 50\,\%$
   c) $a = 0{,}992$
   d) $a = 0{,}97 \Rightarrow p\,\% = -3\,\%$
   e) Ist $a > 1$, so ist p positiv und die Größe nimmt zu.
   Ist $a < 1$, so ist p negativ und die Größe nimmt ab.
   Immer gilt: $a > 0$.

2. a) $K_5 = 750\text{ €} \cdot 1{,}035^5 \approx 890{,}76\text{ €}$

b) $K_5 = 750\text{ €} \cdot 1{,}027^3 \cdot 1{,}045^2 \approx 887{,}17\text{ €}$

Das erste Angebot ist (knapp) günstiger als das zweite.

c) $f(x) = b \cdot a^x$, wobei b für den Anfangswert, a für den Wachstumsfaktor und x z. B. für die Zeit (in Jahren) steht, f(x) für das Kapital.

3. a) $1000\text{ €} \cdot a^1 = 1048\text{ €} \Rightarrow a = 1{,}048 \Rightarrow p\,\% = 4{,}8\,\%$

b) Zählt man die Zeit ab 10 Jahren, so ergibt sich nach 15 Jahren:

$7{,}30\text{ m} \cdot a^{15} = 12{,}05\text{ m} \Rightarrow a = \sqrt[15]{\frac{12{,}05}{7{,}3}} \approx 1{,}034 \Rightarrow p\,\% = 3{,}4\,\%$

Der Baum wächst pro Jahr um rund 3,4 %.

$b \cdot 1{,}034^{10} = 7{,}30\text{ m} \Rightarrow b \approx 5{,}23\text{ m}$

Der Baum wurde mit einer Anfangslänge von 5,23 m eingepflanzt.

[Oder: $b \cdot 1{,}034^{25} = 12{,}05 \Rightarrow b \approx 5{,}22$ m mit geringer Rundungsabweichung]

Man kann auch mit 2 Gleichungen beginnen wie in Formale Aufgaben 3. d) oben.

c) In b) ist unterstellt, dass der Baum jedes Jahr um denselben Prozentsatz wächst.

- Das trifft bei natürlichem Wachstum nie genau zu.
- Kommt ein Baum in die Nähe seiner Endgröße, so nehmen die jährlichen Längenzuwächse ab und nicht zu.
- Über einen baumspezifischen Zeitraum kann das Wachstum näherungsweise exponentiell sein.

d) $K_7 = 500\text{ €} \cdot 1{,}035^3 \cdot 1{,}045^4 \approx 661{,}68\text{ €}$

$K_7 = 500\text{ €} \cdot a^7 = 661{,}08\text{ €} \Rightarrow a = \sqrt[7]{\frac{661{,}08}{500}} \approx 1{,}0407$

Bei einem gleich bleibenden Zinssatz von 4,07 % ergibt sich mit rund 661 € dasselbe Endkapital wie bei der ersten Bank.

4. a) I, denn es ist eine lineare Funktion beschrieben, die steigt.

b) III, denn es ist eine Exponentialfunktion beschrieben, die fällt.

c) IV, denn es ist eine lineare Funktion beschrieben, die fällt.

d) II, denn es ist eine Exponentialfunktion beschrieben, die steigt.

e) IV, denn es ist eine lineare Funktion beschrieben, die fällt. Aber im Gegensatz zu c, wo negative Werte als Schulden möglich sind, kann es bei der Kerzenlänge keine negativen Werte geben.

5. a) 4 a: $f(x) = 1{,}5\,x + 2$

mit x: Temperatur über 15° C; f(x): Fadenlänge in cm

4 b: $f(x) = 150 \cdot 0{,}92^x$

mit x: Jahre ab dem Kauf; f(x): Wert in €

4 c: $f(x) = 50 - 2{,}5\,x$

mit x: Zahl der Tage; f(x): Guthaben/Schulden in €

4 d: $f(x) = 30 \cdot 1{,}05^x$

mit x: Zahl der Tage; f(x): Algenlänge in cm

4 e): $f(x) = 50 - 2{,}5\,x$

mit x: Zahl der Stunden; f(x): Kerzenlänge in cm

b) Exponentialfunktion:

Nach 32 Jahren beträgt die Zahl der Landwirte $3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}25 = 750\,000$.

$a = \sqrt[32]{\frac{750\,000}{3\,000\,000}} = \sqrt[32]{0{,}25} \approx 0{,}9576$

$f(x) = 3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}9576^x$ mit x: Jahre seit 1968

Prognose für 2030: $f(62) = 3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}9576^{62} \approx 204\,427$

Lineare Funktion:

$a = \frac{750\,000 - 3\,000\,000}{32} \approx -70\,312{,}5$

$f(x) = -70\,312{,}5 \cdot x + 3\,000\,000$

Prognose für 2030: $f(62) = -70\,312{,}5 \cdot 62 + 3 \cdot 10^6 = -1\,395\,375$

Mit der linearen Funktion entsteht eine unsinnige Prognose, mit der exponentiellen Funktion ergeben sich rund 204 000 Landwirte im Jahr 2030.

c) Exponentialfunktion:

Nach 32 Jahren beträgt die Zahl der Beamten 36 000.

$a = \sqrt[32]{\frac{36\,000}{30\,000}} \approx 1{,}0057$

$f(x) = 30\,000 \cdot 1{,}0057^x$ mit x: Jahre seit 1968

Prognose für 2030: $f(62) = 30\,000 \cdot 1{,}0057^x \approx 42\,674$

Lineare Funktion:

$a = \frac{6\,000}{32} \approx 187{,}5$

$f(x) = 187{,}5 \cdot x + 30\,000$

Prognose für 2030: $f(62) = 187{,}5 \cdot 62 + 30\,000 = 41\,625$

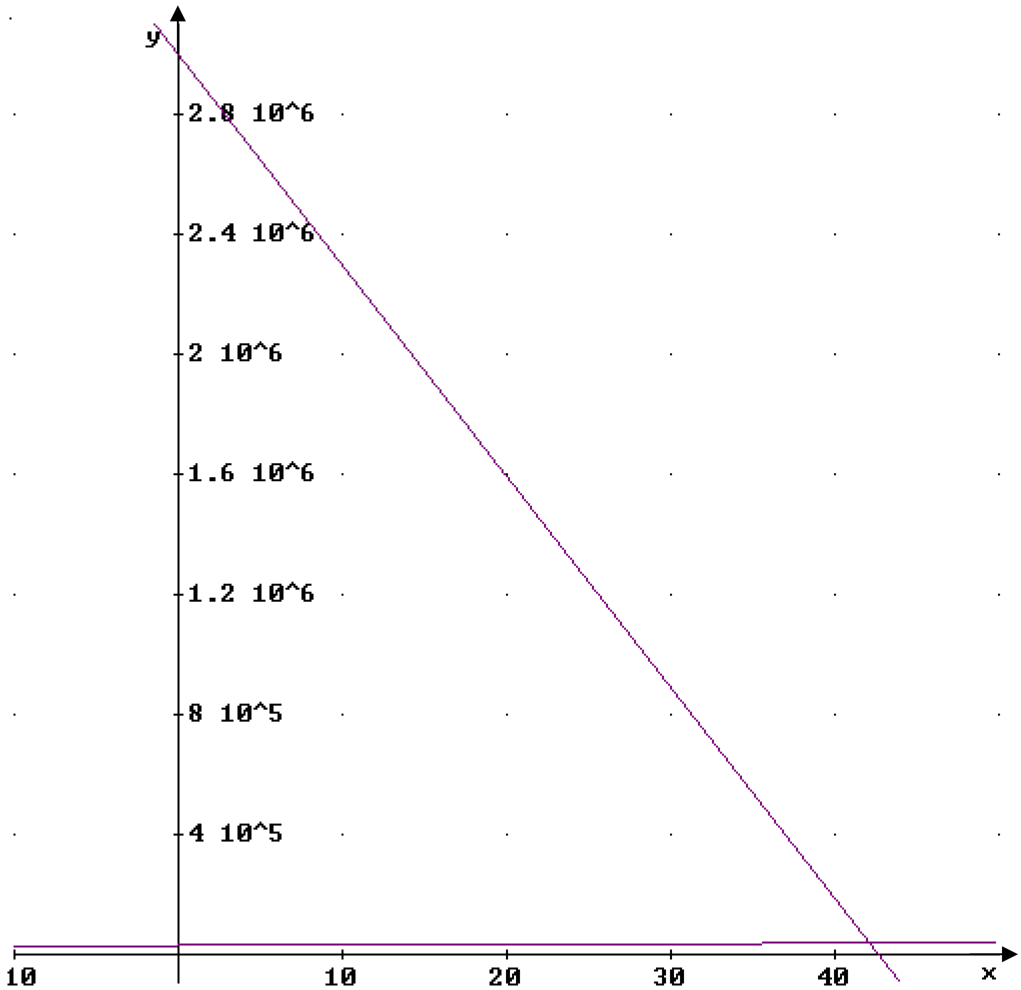
Im Jahr 2030 gibt es nach beiden Prognosen rund 42 000 Beamte.

d) $-70\,312{,}5 \cdot x + 3\,000\,000 = 187{,}5 \cdot x + 30\,000$

$-70\,500\,x = -2\,970\,000$

$x \approx 42$

In 42 Jahren, also rund 2010, hat nach dieser Prognose jeder Landwirt "seinen" Beamten.

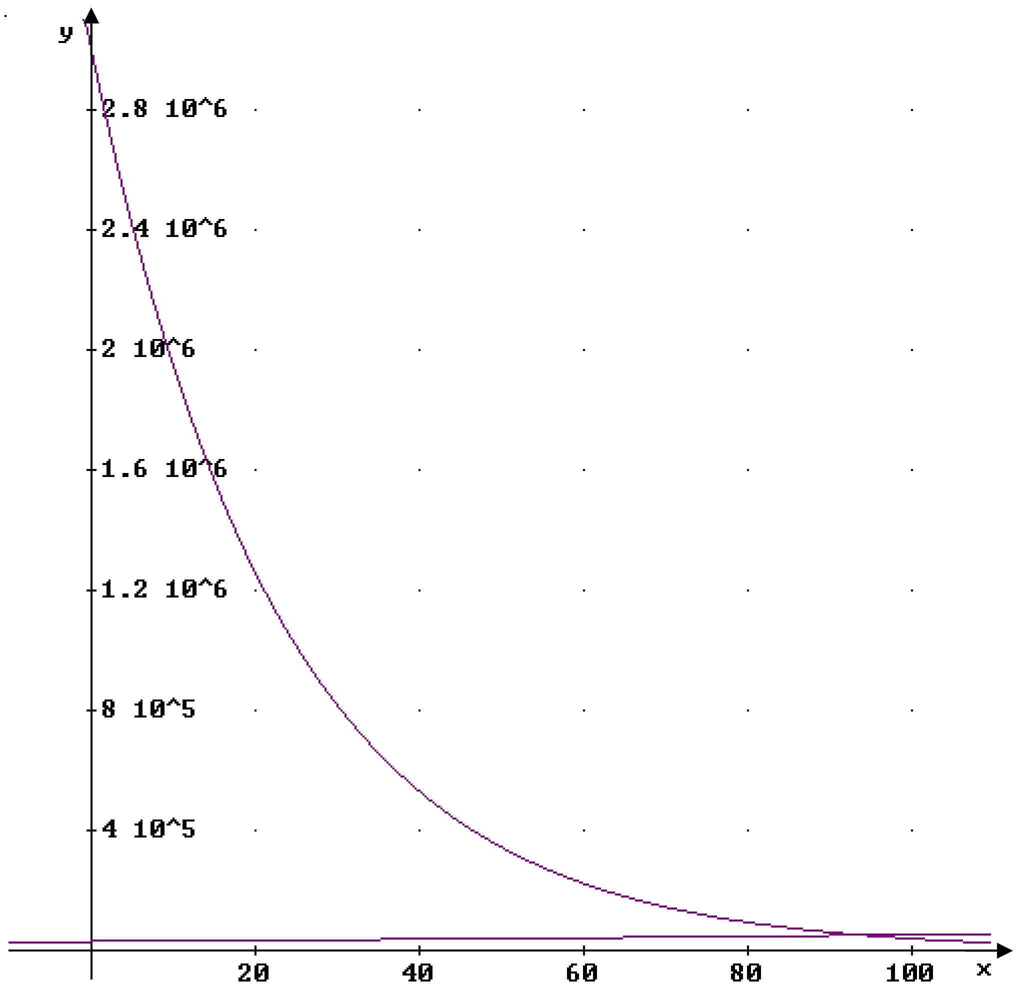


6. a) $3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}9576^x = 30\,000 \cdot 1{,}0057^x \quad | : 30\,000 \quad | : 0{,}9576^x$

$$100 = \left(\frac{1{,}0057}{0{,}9576}\right)^x \quad | \log(\,)$$

$$\log 100 = x \cdot \log \frac{1{,}0057}{0{,}9576}$$

$$x \approx 94$$



In rund 94 Jahren schneiden sich die Kurven und jeder Beamte kümmert sich um "seinen" Landwirt.

b) Zu 6.a): Wenn man ausgehend von zwei Reiskörnern fortwährend von einem Schachbrettfeld zum nächsten die Zahl verdoppelt, bei welchem kommt man dann zu 64 Reiskörnern auf einem Feld?
Antwort: Auf dem 6. Feld liegen 64 Körner.
Zu 6. b): Eine Schädlingsart vervierfacht sich pro Jahr ausgehend von 3 Millionen; eine nimmt um 20 % ab, hat aber zunächst 9 Millionen. Wann gibt es gleich viele?
Antwort: Die Lösung lautet (siehe oben 6. b) 0,68 Jahre. $0{,}68 \cdot 365 \approx 248$
Nach 0,68 Jahren bzw. rund 250 Tagen hat die eine Art die Zahl der anderen Art erreicht.
Zu 6. c): Eine legt 20 € zu 2 % Zinsen an, der andere 10 € zu 4 %. Wann haben beide gleich viel auf dem Konto?
Antwort: Nach knapp 36 Jahren liegt gleich viel auf dem Konto, nämlich rund 41 €.