Materialbasierte, handlungsorientierte Bruchrechnung

Volker Eisen

Programm für heute

„Perlen auf Stäben“ – eine kleine Aufgabe zum Warmwerden

Warum mit Material lernen?

exemplarische Erkundung zweier Lernumgebungen

Auswertung: Umsetzung der Prinzipien

Stöbern im Material

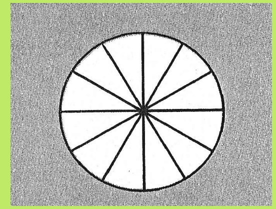
Vertiefung: fokussierte Förderung mit Material

Rückblick

Was bedeutet „verstehen"?

DZLM MUED

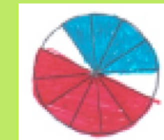
a.) Färbe zuerst 1/4 des Kreises schwarz.
Färbe dann noch 1/6 des Kreises schwarz.
Welchen Bruchteil des Kreises hast
Du insgesamt schwarz gefärbt?



b.) Berechne 1/4 + 1/6.

Bearbeitung von Anke

zu a) Ein Zehntel!



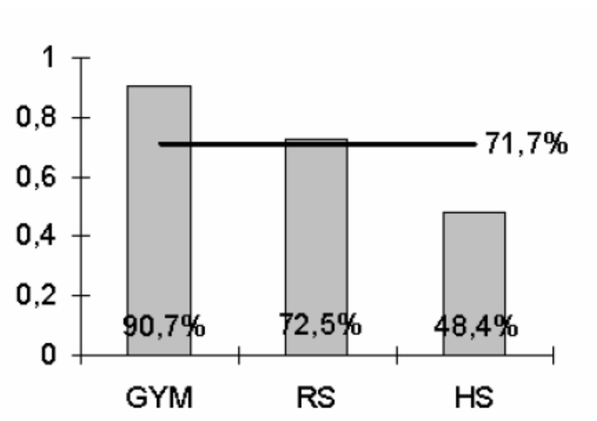
zu b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$.

Der Interviewer fragte daraufhin nach:
I.: $\frac{5}{12}$. Das haben wir jetzt ausgerechnet, daß da $\frac{5}{12}$ rauskommt... Und bei der Skizze eben, was hast du da rausbekommen?
A.: $\frac{1}{10}$.
I.: Was ist denn nun richtig?
A.: . . . (6 s) . . . Beides.
I.: Warum?
A.: Ja, erstmal $\frac{1}{10}$, das habe ich ja abgezählt, und $\frac{5}{12}$ habe ich ja ausgerechnet.

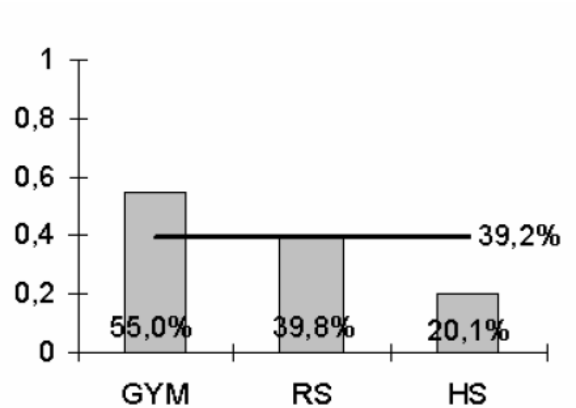
Lösungshäufigkeiten von Schüler/innen Ende Klasse 7 (aus Palma, n=1168)

Was glauben Sie, welche Zahlen gehören zu welcher Teilaufgabe?

b.) Formales Hantieren



a.) Inhaltlich Denken



(Aufgabe Hasemann 1986, Lösungshäufigkeiten aus PALMA, Wartha 2007)

Rechnen statt Verstehen ?!

Was bedeutet „verstehen“?

Zwei Grundvorstellung vom Dividieren wichtig:

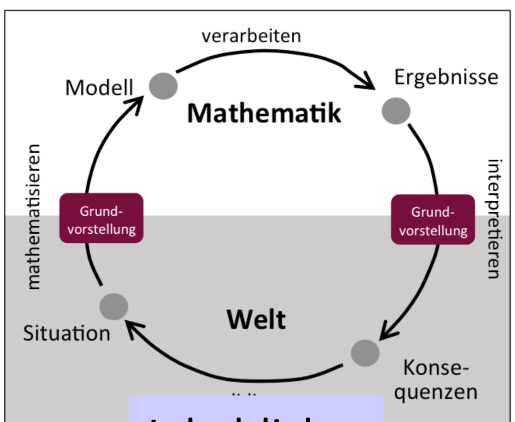
- Verteilen
- Passen in

Preisfrage bei „Der große Preis“:

- Was ist 30:½?
- - keine Antwort –

60 – aber fragen Sie mich nicht, wieso!

Also ist 30 : ½ = 60



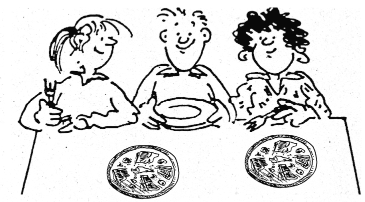
Geteilt als „Passen in“

60 mal

Inhaltlich bearbeiten

Wie oft passt ½ in die 30?

Grundvorstellungen zu Brüchen



Teil (eines Ganzen): $\frac{3}{4}$ (von 1)

Resultat einer Division: $\frac{3}{4} = 3 : 4$

Relativer Anteil: $\frac{3}{4}$ von …

Verhältnis: $\frac{3}{4} = 3 : 4$ (3 zu 4)

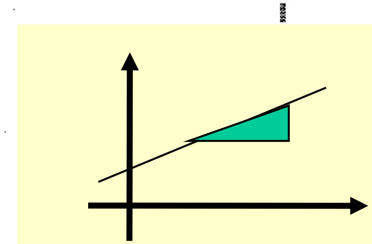
$\frac{3}{4}$

Vergleichsoperator: $\frac{3}{4}$ mal so viel wie …

Quasikardinalzahl: $\frac{3}{4} = 3$ Viertel

Absoluter Anteil: $\frac{3}{4}$ ………. drei von vier

Quasiordinalzahl: $\frac{1}{4}$ ………. jeder Vierte



Kasten 1: Einige Deutungen einer Bruchzahl

(Malle 2004 in ML 123, S. 5)

GV nicht nur für die Brüche, sondern auch für die Operationen

Erweitern und Kürzen

$$\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{Verfeinerung der Einteilung}} \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{2} \xleftarrow{\text{Vergröberung der Einteilung}} \frac{2}{4}$$

Addition und Subtraktion von Bruchzahlen

Zusammenfügen, Hinzufügen ← Addieren → Vorwärtsbewegen, Vorwärtsschreiten (z. B. in Fünftelschritten)

Subtrahieren → Wegnehmen; Subtrahieren → Rückwärtsbewegen, Rückwärtsschreiten (z. B. in Fünftelschritten)

Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl

Abgekürzte Addition: $\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5} \longleftarrow 3\cdot\frac{4}{5}$

$\frac{4}{5}\cdot 3 \longrightarrow$ Von-Deutung: $\frac{4}{5}$ von 3

Multiplikation von Bruchzahlen

Von-Deutung: $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{7}$

Division von Bruchzahlen

$\frac{4}{9}:2 \rightarrow$ Teilen (Verteilen)

$\frac{4}{9}:2 \rightarrow$ Messen (Aufteilen)

$\frac{7}{2}:\frac{7}{10} \rightarrow$ Messen (Aufteilen)

Kasten 2: Einige Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen für Bruchzahlen

(Malle 2004 in ML123, S. 7)

Prinzip der Darstellungsvernetzung

DZLM

MUED

Für $b > c$:

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$$

Symbolisch-algebraische Darstellungen

Was ist größer $\frac{3}{5}$ oder $\frac{3}{4}$

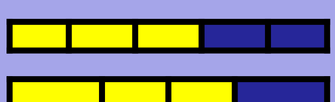
Symbolisch-numerische Darstellungen

Verbale Darstellungen

Bildliche Darstellungen

Konkrete Darstellungen (Artefakte, Handlungen)

Welcher Anteil ist größer?



Theorie der Repräsentation nach Bruner

Entwicklung des Denkens:

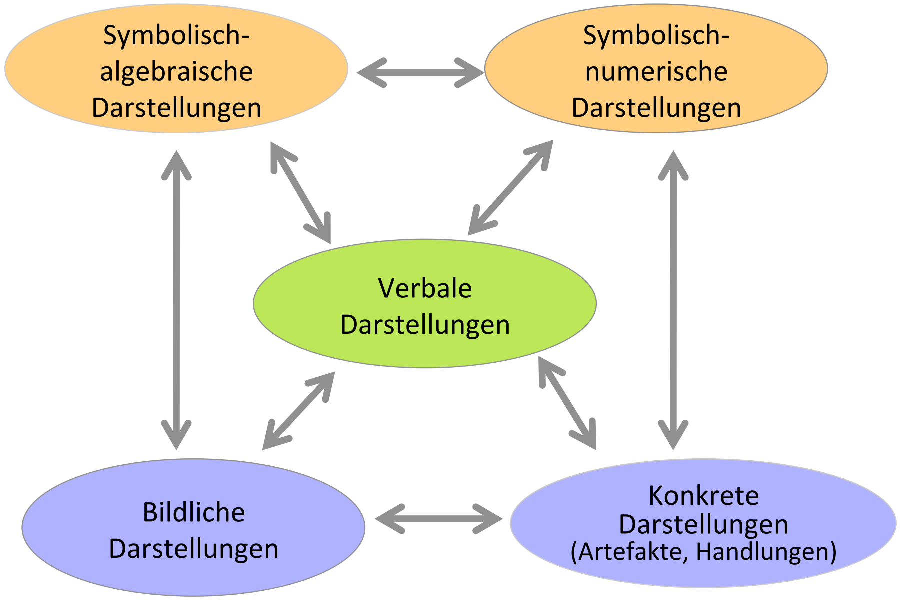
zunehmend bessere Koordination zwischen den Darstellungsebenen

Prinzip des Wechsels und der Verzahnung

Abstraktion **und** Konkretisierung

(Bruner 1971, Lesh 1979, Duval 2006 et al.)

Prinzip der Darstellungsvernetzung und operatives Prinzip



(Bruner 1971, Lesh 1979, Duval 2006 et al.)

mentales Operieren nach dem **operativen Prinzip**

- Was passiert, wenn ...
- Was müsste ich tun, um ...
- Lösung vom Material

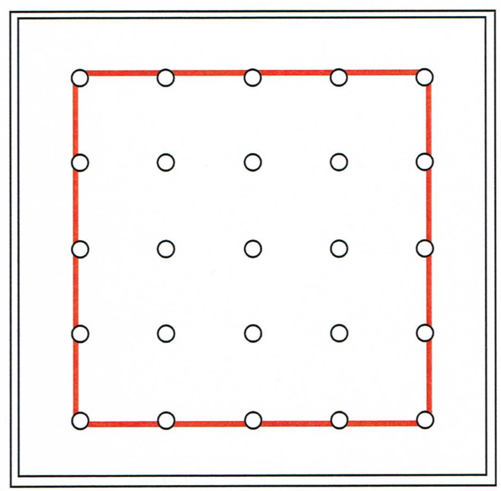
Prinzip „Inhalt vor Kalkül“

→ in Grundvorstellungen investieren;

→ länger im Inhaltlichen verbleiben

→ immer wieder Formales auch aufs Inhaltliche zurückbeziehen

→ auch in den Klassenarbeiten Inhaltliches abfragen



Das rote Gummiband zeigt das Ganze.

1. Spanne mit weiteren Gummibändern die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{16}$.
2. Finde verschiedene Möglichkeiten um $\frac{1}{4}$ zu spannen.
3. Spanne die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{16}$.

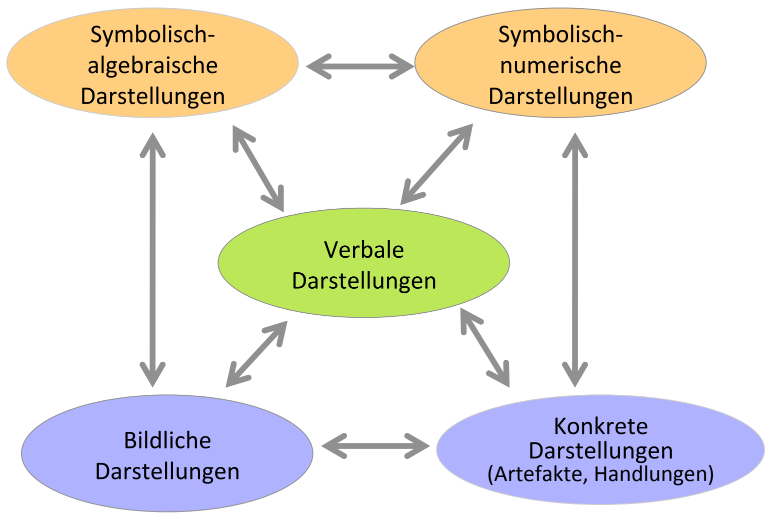
$\frac{1}{3}$???

Versuche wenn möglich, verschiedene Lösungen auf dem Geobrett zu spannen.

Fazit: Worauf kommt es an?

„Anschauung ist nicht eine Konzession an angeblich theoretisch schwache Schüler, sondern fundamental für Erkenntnisprozesse überhaupt“ (Winter)

„Ziel des Einsatzes von Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen ist nicht eine schlichte ‚Vereinfachung' der Zugänge zu mathematischen Sachverhalten, sondern die Konstruktion und der Ausbau klarer, tragfähiger mentaler Vorstellungsbilder … braucht sowohl seine Zeit als auch ausdrücklicher und planvoller Aktivitäten“ (Krauthausen/Scherer)



Funktionen von Anschauungsmitteln:

- **Lösungshilfe**
  → darstellen und rechnen
- **Lernhilfe**
  → mentale Bilder aufbauen
- **Kommunikationshilfe**
  → argumentieren / begründen

mentales Operieren nach dem **operativen Prinzip**

- Was passiert, wenn ...
- Was müsste ich tun, um ...
- Lösung vom Material

Brüche addieren mit dem Bruchstreifen

Gütekriterien zur Auswahl von Anschauungsmitteln (nach Krauthausen/Scherer 2007*)*

Wird die mathematische Grundidee angemessen verkörpert?

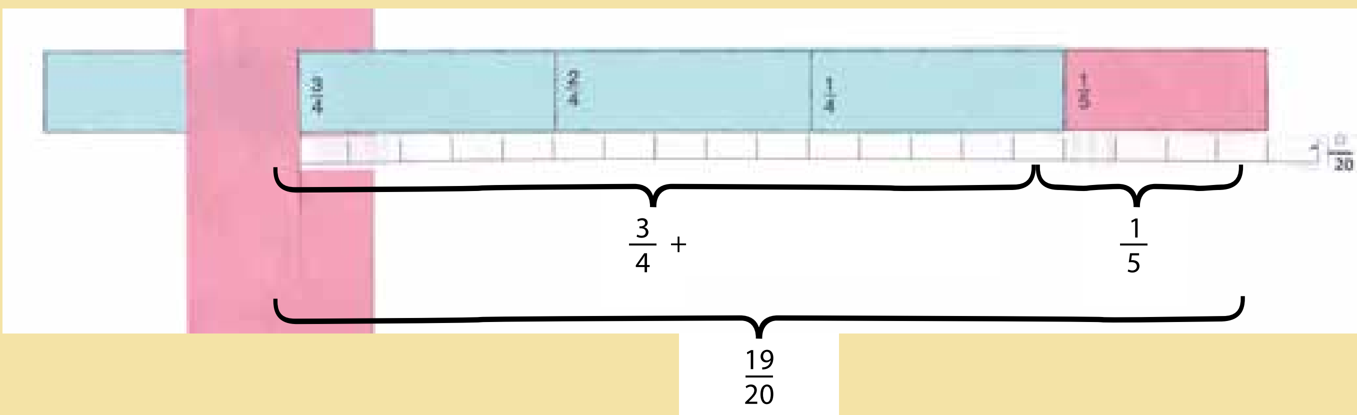
Ist eine Übersetzung in graphische Bilder möglich? (Ikonisierung)

Wird die Ausbildung von Vorstellungsbildern und das mentale Operieren mit ihnen unterstützt'?

Werden verschiedene individ. Bearbeitungs- und Lösungswege zu ein und derselben Aufgabe ermöglicht?

Wird der kommunikative und argumentative Austausch über verschiedene Lösungswege unterstützt'?

Ist eine strukturgleiche Fortsetzbarkeit gewährleistet?



Ist ein Einsatz in unterschiedlichen Inhaltsbereichen (anstatt nur für sehr begrenzte U'-inhalte) möglich?

Ist ein Einsatz im Rahmen unterschiedlicher Arbeits- und Sozialformen möglich?

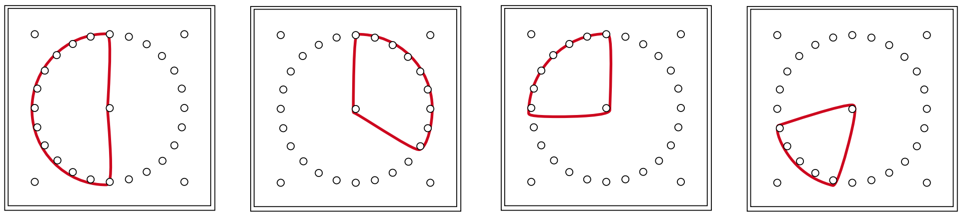
Ist die Handhabbarkeit dem Alter der Kinder angemessen?

Wird die Anknüpfung an Lernprozesse und Vorstellungen aus der Grundschule unterstützt?

...

Ein Fördermodell (Wartha 2011)

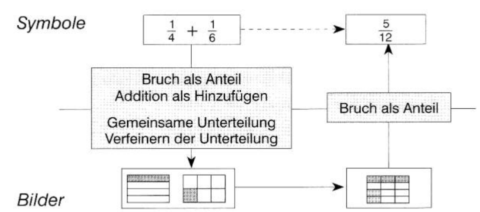
Feinere Unterteilungen finden (Erweitern)



In vier Phasen vom konkreten zum gedanklichen Darstellen

1. Phase: Handeln am geeigneten Material	S finden eine Verfeinerung, indem sie am Steckbrett arbeiten. Dabei verbalisieren sie, was sie tun.
2. Phase: Beschreiben der Handlung mit Sicht auf das Material	S beschreiben, wie sie eine weitere Verfeinerung finden können, ohne das Steckbrett anzufassen.
3. Phase: Beschreiben der Handlung ohne Sicht auf das Material	S beschreibt einer anderen S, was sie am (verdeckten) Steckbrett tun muss, um eine weitere Verfeinerung zu finden.
4. Phase: Beschreiben einer vorgestellten Handlung	S finden auf der symbolischen Ebene weitere Verfeinerungen für ½ und für andere Stammbrüche.

- parallel auf drei Darstellungsebenen arbeiten
- Partnerarbeit oder individuelle Förderung
- kein Stufenmodell!
- Diagnose über Grundvorstellungsumweg



Wartha 2011

- in welcher Phase treten Schwierigkeiten auf?
- keine Phase überspringen
- ggf. nur eine Phase zurückgehen

Literatur

Fröhlich, Ines; Katzenbach, Michael (2009): Mathematik beGREIFEN. In: Praxis der Mathematik in der Schule 29, S. 1-7

Lengnink, Katja; Meyer, Michael; Siebel, Franziska (2014): MAT(H)Erial. In: Praxis der Mathematik in der Schule 58, S. 3-8

Malle, Günther (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: mathematik lehren 123, 4-8.

Prediger, Susanne (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten, in: Fritz, Annemarie / Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden, Beltz, Weinheim, 213-234 http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/veroeff/09-Beltz-Textaufgaben-Prediger.pdf

Prediger, Susanne; Wessel, Lena (2012): Darstellungen vernetzen – Ansatz zur integrierten Entwicklung von Konzepten und Sprachmitteln. In: Praxis der Mathematik in der Schule 45, S. 1-9 http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/veroeff/12-Prediger_Wessel_PM-H45-Webversion.pdf

vom Hofe, Rudolf (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen. In: mathematik lehren 118, S.4-8

Wartha, Sebastian (2011): Handeln und Verstehen. Förderbausteine: Grundvorstellungen aufbauen. In: mathematik lehren 166, 8-14.