Lösungen zu Analysis, 2016, Teil B, Aufgabengruppe 1

Lösung zu Aufgabe 1

a) Der Schnittpunkt mit der y-Achse wird bestimmt, indem man $f(0)$ berechnet:

$$f(0) = e^{\frac{1}{2}\cdot 0} + e^{-\frac{1}{2}\cdot 0} = 2.$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist also gegeben durch $S_y(0|2)$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^x > 0$ und $e^{-x} > 0$. Damit gilt:

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x} > 0.$$

Der Graph G_f verläuft also oberhalb der x-Achse.

b) ➤ *Bestimmung des Symmetrieverhaltens*

Zur Untersuchung des Symmetrieverhaltens von G_f wird zunächst $f(-x)$ bestimmt und anschließend überprüft, ob $f(-x) = f(x)$ oder $f(-x) = -f(x)$ gilt:

$$f(-x) = e^{\frac{1}{2}\cdot(-x)} + e^{-\frac{1}{2}\cdot(-x)} = e^{-\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x} = f(x).$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also $f(-x) = f(x)$. Damit ist G_f symmetrisch zur y-Achse.

➤ *Verhalten für $x \to \pm\infty$*

Es gelten:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{2}x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = +\infty.$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x} = +\infty$$

Analog gelten:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{2}x} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = 0.$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x} = +\infty$$

☞ *Alternative:* Aufgrund der Achsensymmetrie von G_f gilt:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

c) ➤ *Nachweis, dass $f''(x) = \frac{1}{4}\cdot f(x)$ gilt*

Zunächst wird die erste Ableitung der Funktion f mithilfe der Kettenregel bestimmt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x} \\ &= \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right). \end{aligned}$$

Nun wird wieder mithilfe der Kettenregel die zweite Ableitung der Funktion f bestimmt:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}x} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right). \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$f''(x) = \frac{1}{4}\cdot f(x).$$

➤ *Nachweis, dass G_f linksgekrümmt ist*

In Aufgabenteil a) wurde gezeigt, dass folgende Aussage für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) > 0.$$

Wegen

$$f''(x) = \frac{1}{4}\cdot f(x)$$

gilt auch $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und der Graph G_f ist linksgekrümmt.

d) Zunächst werden die Nullstellen der ersten Ableitung von f bestimmt:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad e^{\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x} \quad\Longleftrightarrow\quad x = 0.$$

Für die Bestimmung der Art des Extremums wird nun der Wert der zweiten Ableitung an der Stelle $x = 0$ bestimmt.

$$f''(0) = \frac{1}{4}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}\cdot 0} + e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}\right) = \frac{1}{4} > 0.$$

Der Graph G_f besitzt also an der Stelle $x = 0$ ein Minimum. Der Tiefpunkt entspricht dem Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse. Dieser wurde bereits in Aufgabenteil a) bestimmt und es gilt $T(0|2)$.

e) Es gilt:

$$f(2) = e^{\frac{1}{2}\cdot 2} + e^{-\frac{1}{2}\cdot 2} = e + e^{-1}.$$

Die Steigung m der Tangente im Punkt $P\left(2|e + e^{-1}\right)$ ist dann gegeben durch den Wert der ersten Ableitung an dieser Stelle:

$$m = f'(2) = = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}\cdot 2} - e^{-\frac{1}{2}\cdot 2}\right) = \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right).$$

Die Gerade g hat also die Gleichung $g(x) = \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right)x + c$. Der y-Achsenabschnitt c der Geraden g wird mittels einer Punktprobe mit P bestimmt:

$$e + e^{-1} = \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right)\cdot 2 + c \quad\Longleftrightarrow\quad e + e^{-1} = e - e^{-1} + c \quad\Longleftrightarrow\quad c = 2e^{-1} = \frac{2}{e}.$$

Die Tangente g an G_f im Punkt P hat also die Gleichung

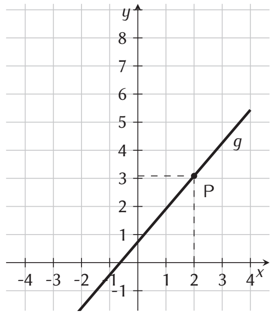
$$g(x) = \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right)x + \frac{2}{e}.$$

Lösungen

Auf eine Dezimale genau gerundet, gelten dann

$$g(x) = 1{,}2x + 0{,}7 \quad \text{und} \quad \mathrm{P}(2|3{,}1)\,.$$

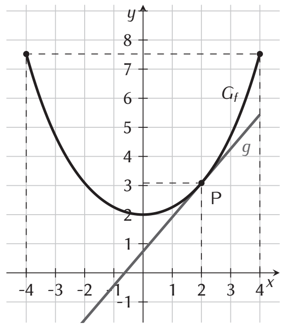
Die Gerade g und der Punkt P werden in der folgenden Abbildung skizziert.



f) Es gilt:

$$f(4) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot 4} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot 4} = \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-2} \approx 7{,}52.$$

Der Graph der Funktion f ist also symmetrisch zur y-Achse, hat ein Minimum bei T(0|2), ist linksgekrümmt auf ganz $\mathbb{R}$ und verläuft näherungsweise durch den Punkt A(4|7,52). Die Tangente an G_f im Punkt P wurde bereits in das Schaubild eingezeichnet. Mithilfe dieser Informationen kann nun G_f gezeichnet werden.



g) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\cdot[f(x)]^2 - [f'(x)]^2 &= \frac{1}{4}\cdot\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]^2\\
&= \frac{1}{4}\cdot\left[\mathrm{e}^{x} + 2 + \mathrm{e}^{-x}\right] - \frac{1}{4}\cdot\left[\mathrm{e}^{x} - 2 + \mathrm{e}^{-x}\right]\\
&= \frac{1}{4}\cdot\left[\mathrm{e}^{x} + 2 + \mathrm{e}^{-x} - (\mathrm{e}^{x} - 2 + \mathrm{e}^{-x})\right]\\
&= \frac{1}{4}\cdot[4]\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Dies war genau die Aussage, die gezeigt werden sollte.

h) In Teilaufgabe g) wurde gezeigt, dass folgende Beziehung gilt:

$$\frac{1}{4}\cdot[f(x)]^2 - [f'(x)]^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4}\cdot[f(x)]^2 = 1 + [f'(x)]^2\,.$$

In Teilaufgabe a) wurde gezeigt, dass gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, damit kann auf beiden Seite die Wurzel gezogen werden:

$$\frac{1}{2}\cdot[f(x)] = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

Für die Kurvenlänge bedeutet dies:

$$L_{a;b} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{2}\cdot[f(x)]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für die gesuchte Kurvenlänge $L_{0;b}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
L_{0;b} &= \frac{1}{2}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^b \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left[2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^b\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left[2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}b} - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}b} - \left(2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot 0} - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot 0}\right)\right]\\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}b} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}b}.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Der Aufhängepunkt des Seils bei Mast 2 wird im Folgenden mit A bezeichnet. Der Durchhang des Seils entspricht der Differenz der y-Werte der beiden Punkte A und des Tiefpunktes T. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter. Der Durchhang des Seils ist auf Zentimeter genau zu bestimmen. Es genügt also eine Genauigkeit von zwei Dezimalen bei der Bestimmung der y-Werte.