Zahlenrätsel 1

4–8 Stunden

Voraussetzungen
Es ist von Vorteil, wenn die Lernenden die Fachbegriffe „addieren“, „subtrahieren von“ usw. schon kennengelernt haben. Diese Begriffe können u. a. in dieser Unterrichtseinheit gefestigt werden. Für die Bearbeitung des letzten Arbeitsblattes ist es hilfreich, wenn die Lernenden die Klammerschreibweise von Zahltermen schon in einem anderen Kontext kennengelernt haben.

Kompetenzen
- **inhaltlich:** Zahlenrätsel in entsprechende Rechenterme übersetzen und umgekehrt, das Distributivgesetz intuitiv anwenden, Streichholzschachteln als Stellvertreter von Variablen und „Schachtelanordnungen“ als Stellvertreter von Termen mit Variablen erfahren
- **prozessbezogen:** Schachtelanordnungen zum Begründen überraschender Phänomene nutzen, durch den Umgang mit den Materialien propädeutisch Vorstellungen zu Variablen und zum Rechnen mit ihnen aufbauen, Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Darstellungen versprachlichen und Schachtelanordnungen als Problemlösehilfe verwenden

Material
- 10 Schachteln und ca. 60 Hölzchen pro Partnergruppe,
- Arbeitsblätter zum Erarbeiten 1–5 (S. 12–16)
- Arbeitsblätter Sichern 1–2 (Material im Koffer)
- Arbeitsblätter Vertiefen 1–6 (auf CD)

Möglicher Unterrichtseinsatz/Differenzierung
Zahlenrätsel dieser Art, die für alle möglichen gedachten Zahlen zum gleichen Ergebnis führen, sind für die Lernenden zunächst höchst verblüffend. Aus diesem Grund ist es durchaus sinnvoll, vor dem Einsatz der ersten Arbeitsblätter solche überraschenden Zahlenrätsel im Plenum durchzuführen. Die Ideen zu dieser Lerneinheit lehnen sich eng an die entsprechenden Lernumgebungen der Schweizer Zahlenbücher an.
Die Arbeitsblätter zum *Erarbeiten 1 bis 5* sollten in der vorgegebenen Reihenfolge bearbeitet werden (vgl. Tabelle auf S. 10). Auf diesen Arbeitsblättern finden sich jeweils Aufgaben zum Weiterdenken für diejenigen unter den Schülerinnen, die schneller zum Ziel kommen als die anderen.
Arbeitsergebnisse zu diesen weiterführenden Aufgaben können z. B. gewürdigt werden, indem die entsprechenden Schülerinnen ihre Erkenntnisse im Plenum präsentieren oder indem die Lehrkraft kurze Feedbacks dazu gibt. Bei leistungsschwächeren Schülerinnen oder Klassen kann es sinnvoll sein, das Arbeitsblatt *Mit Zahlenrätseln experimentieren* (Vertiefen 1) vor dem Arbeitsblatt *Zahlenrätsel erfinden* (Erarbeiten 5) einzusetzen.

Die Arbeitsblätter zum Sichern (Material im Koffer) zeigen auf, welche Konzepte mit allen Lernenden gesichert werden sollten. Dies kann, je nach eigenen Präferenzen oder auch nach Bedürfnissen der Lerngruppe, im Plenum oder mithilfe der bereitgestellten Arbeitsblätter geschehen. Zentral ist die Idee, dass die Schachtel als „Quasivariable" für die gedachte Zahl steht. Dies bedeutet z. B., dass Zahlen, die zur gedachten Zahl addiert werden, als Anzahl Hölzchen neben die Schachtel gelegt werden müssen und nicht zu den in der Schachtel befindlichen Hölzchen hinzugefügt werden dürfen.

Die Arbeitsblätter zum Vertiefen (auf CD) wiederum können in unterschiedlicher Reihenfolge bearbeitet werden. Sie unterscheiden sich in ihren Anforderungen (gekennzeichnet durch Sternchen) und können zur Bearbeitung von den Schülerinnen frei ausgewählt oder auch von der Lehrkraft empfohlen werden. Es finden sich dort sowohl sehr offene als auch eher geschlossene Aufgabenformate.

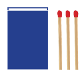
Die Schachteln und Hölzchen sind ein nützliches Arbeitsmittel, um Terme mit Variablen zunächst auf enaktiver Ebene zu veranschaulichen. Sie können im Sinne einer vertikalen Vernetzung der Lehrplaninhalte an unterschiedlichen Stellen wieder aufgegriffen werden: Es lässt sich die Einführung von Variablen anknüpfen (*Zahlenrätsel 2*), sie sind ein hilfreiches Modell beim Lösen von Gleichungen (vergleiche *Einheit Knack die Box*) oder auch bei der Einführung von linearen Gleichungen mit zwei Variablen (in Jahrgangsstufe 7/8). Des Weiteren kann man sie als ein Modell unter anderen zur Einführung linearer Gleichungssysteme nutzen.

Sichern 1 – Mögliche Demonstration durch Lehrkraft oder Schülerin Schachtelanordnungen zu Zahlenrätsel legen

Denke dir eine Zahl, ...

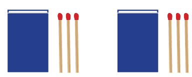
... stecke also die entsprechende Anzahl der Hölzchen in **jede** Schachtel.

Addiere 3, ...



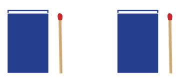
... , das heißt: Lege 3 Hölzchen **daneben**, damit du jederzeit deine versteckte Zahl wiederfinden kannst.

Multipliziere das Ergebnis mit 2



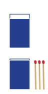
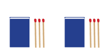
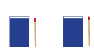
Du brauchst also nochmal deine gedachte Zahl in einer Schachtel, und dann brauchst du noch einmal die 3 Hölzchen dazu.
(Wir können jetzt kontrollieren, dass wir das vorherige Ergebnis wirklich verdoppelt haben.)

Subtrahiere 4, ...



Du nimmst also 4 Hölzchen weg. Wenn du das gleichmäßig machst, kannst du hinterher besser durch 2 teilen.

Der Schwerpunkt in dieser Lerneinheit liegt auf den Termen ohne Klammern und dem intuitiven Erkennen des Distributivgesetzes. Das Aufstellen von entsprechenden Termen mit Klammern wird lediglich in den Arbeitsblättern zum Vertiefen aufgegriffen. Dort kann auch das im Zusammenhang mit Termen zentrale Phänomen herausgearbeitet werden, dass sich die jeweils gleiche Situation mithilfe unterschiedlicher Terme beschreiben lässt (Beschreibungsgleichheit).
Die Zahlenrätsel in Worten, das Material und die symbolischen Darstellungen können und sollen parallel genutzt werden. Lernende mit mehr Anschauungsbedarf können länger beim Material bleiben, und es kann je nach Bedarf und Schwierigkeitsempfinden bei den Aufgaben auch zwischen dem Arbeitsmittel „Schachtelanordnungen" und der symbolischen Darstellung immer wieder hin und her gewechselt werden.

Text	Schachtelanordnung	Terme ohne Klammern	Terme mit Klammern
Ich denke mir eine Zahl Ich addiere 3		5 5 + 3	5 5 + 3
multipliziere das Ergebnis mit 2		2 · 5 + 6	2 · (5 + 3)
subtrahiere von diesem Ergebnis 4		2 · 5 + 2	2 · (5 + 3) - 4
dividiere anschließend durch 2		5 + 1	(2 · (5 + 3) - 4) : 2
Jetzt subtrahiere ich die gedachte Zahl und erhalte		1	(2 · (5 + 3) - 4) : 2 - 5

Möchte man weitere mathematische Konzepte im Zusammenhang mit Zahlenrätseln thematisieren wie beispielsweise Umkehroperationen, Grenzen des Modells usw., so können bereits in Jahrgangsstufe 5/6 Teile aus der Lerneinheit *Zahlenrätsel 2* eingesetzt werden. Hier geht es vorrangig um Zaubertricks, bei denen die jeweils gedachte Zahl „in Sekundenschnelle" erraten werden soll – eine Fragestellung, die auch in Klasse 5/6 schon sehr motivierenden Charakter hat.

Lösungen zu den Arbeitsblättern

Hier ist exemplarisch nur die ausführliche Lösung zu *Erarbeiten 3 – Richtiges und falsches Anordnen von Schachteln und Hölzchen* eingefügt. Weitergehende ausführliche Lösungen, die gegebenenfalls auch für die Hand der Schülerin geeignet sind, befinden sich auf der CD zum Koffer.

Richtiges und falsches Anordnen von Schachteln und Hölzchen – Lösungen

1
a) Lukas hat sich die Zahl 2 gedacht. Das erkennt man an der Anzahl der Hölzchen, die in der ersten Schachtel liegen.
b) Lukas hat die Hölzchen in die Schachteln verteilt. Er hätte sie neben die Schachteln legen müssen.
c) Jede Schachtel in der Anordnung enthält immer nur die gedachte Zahl. Die muss man jederzeit während des Rätsels wiederfinden können.
d) Hier ist die korrigierte Schachtelanordnung. Am Ende erhält man immer 1.

2
a) Lina hat sich die Zahl 3 gedacht.
b) In der Zeile 2 liegen eine Schachtel und 4 Hölzchen. Wenn man jetzt verdoppelt, dann hat man 2 Schachteln und 8 Hölzchen.
c) Wenn Lina sich eine andere Zahl gedacht hätte, dann würden z.B. in der markierten Zeile immer noch 2 Schachteln liegen und 8 Hölzchen. Nur würden in jeder Schachtel nicht 3, sondern z.B. 4 oder 5 oder 6 Hölzchen liegen.
d) Nein, das wäre falsch gewesen. Es ist Zufall, dass sie sich die gleiche Zahl gedacht hat, die am Ende übrigbleibt. Sie muss auf alle Fälle die Schachtel wegnehmen, denn hier ist Linas gedachte Zahl versteckt.

Rätsel	Schachtelanordnung
Denke dir eine Zahl.	
Verdoppele.	
zu 1. Addiere 6.	
Halbiere.	
Subtrahiere 2.	
Subtrahiere deine gedachte Zahl.	

Rätsel	Schachtelanordnung
Denke dir eine Zahl.	
Addiere 4.	
zu 2. Verdoppele.	
Subtrahiere 2.	
Halbiere.	
Subtrahiere deine gedachte Zahl.	

Ich erhalte immer 3!

Zum Weiterdenken:

Lukas könnte z.B. im vorletzten Schritt nicht 2 subtrahieren, sondern 3.
Wenn Lina anstelle der gedachten Zahl 3 subtrahiert, dann erhält sie am Ende immer ihre gedachte Zahl als Ergebnis!

Hinweise:
1. Nach: Affolter, Walter; Amstad, Heinz; Doebeli, Monika; Wieland, Gregor: Schweizer Zahlenbuch 5, Schulbuch, ISBN 978-3-264-83750-6, Zug, Klett & Balmer, 2009, S. 75
2. Zur besseren Sichtbarkeit sind alle Streichholzschachteln dunkel gefärbt und die Streichhölzer mit Kopf gezeichnet, während die Schachteln im Koffer schlicht weiß sind und die Hölzchen aus Sicherheitsgründen keine Anzünd-Köpfe haben.

Mögliche Anordnung der Arbeitsblätter

Zweck/Arbeitsblatt	Aktivität	Kommentar
Erarbeiten 1 *Ein Zahlenrätsel ausprobieren*	Die Lernenden berechnen in eigenem Tempo ein Zahlenrätsel mit unterschiedlichen Zahlen und erhalten immer das gleiche Endergebnis.	Bei ersten Begründungsversuchen werden einige Schüler schon konstruktive Ideen aufzeigen, während die meisten anderen sich noch mit nicht zielführenden Vermutungen beschäftigen.
Erarbeiten 2 *Das Zahlenrätsel darstellen und erklären*	Die Lernenden lernen mit den „Schachtelanordnungen“ eine Darstellungsmöglichkeit für die Zahlenrätsel kennen und erschließen sich eine adäquate Deutung durch konkretes Handeln mit den Schachteln und Hölzchen.	Hier kann es durchaus vorkommen, dass Lernende die „zu addierenden Hölzchen“ mit in die Schachtel legen. Tritt dies gehäuft auf, kann es sinnvoll sein, hier schon auf „Sichern 1“ zurückzugreifen (s. unten).
Sichern 1 *Die Schachtelanordnung gemeinsam deuten*	Es wird eine gemeinsame Interpretation der Schachtelanordnungen gefunden.	Zentrale Erkenntnis dieser Phase muss sein, dass sich in jeder Schachtel immer nur die gedachte Zahl befinden darf.
Sichern 2 *Schachtelanordnungen verstehen*	Die Handlungen aus den Phasen Erarbeiten 2 und Sichern 1 werden systematisch in symbolischer Termschreibweise dargestellt.	Materialhandlungen und symbolische Schreibweisen werden parallel genutzt und sprachlich miteinander in Beziehung gesetzt.
Erarbeiten 3 *Richtiges und falsches Anordnen von Schachteln und Hölzchen*	Die Lernenden setzen sich bewusst mit einer fehlerhaften und einer richtigen Umsetzung der Zahlenrätsel in Schachtelanordnungen auseinander.	Diese Phase dient dazu, die in der vorangegangenen Sicherungsphase erörterten „Variablenkonzepte“ in eigenem Lerntempo zu verarbeiten.
Erarbeiten 4 *Noch mehr Zahlenrätsel*	Die Lernenden festigen und/oder vertiefen durch eine eigene Auswahl die Beziehungen zwischen den unterschiedlichen Darstellungsebenen.	Hier werden etliche Lernende schon so weit sein, dass sie keine Materialhandlungen mehr brauchen und alleine auf ikonischer Ebene arbeiten. Einige werden auf der Suche nach abkürzenden Notationen Schreibweisen anbieten wie z. B. „4 Sch. + 6 H“.
Erarbeiten 5 *Zahlenrätsel selbst erfinden*	Die Lernenden haben zunächst die Gelegenheit, durch problemorientiertes Arbeiten Zahlenrätsel zu vervollständigen, bevor sie solche eigenständig erfinden und einüben.	Diejenigen Lernenden, die das hier initiierte Variablenkonzept bereits verstanden haben, werden keine Schwierigkeiten haben, die enaktive oder ikonische Ebene zielführend zu nutzen, um passende Zahlenrätsel selbst zu erfinden. Andere werden hier noch sehr stark auf der „Probierebene“ agieren. Ggf. kann daher dieses AB auch erst nach „Vertiefen 1“ eingesetzt werden.

***** /**/*****Vertiefen 1** *Mit Zahlenrätseln experimentieren* (auf CD)	Die Lernenden ändern ausgewählte Schritte des Zahlenrätsels systematisch ab, um deren Auswirkungen auf das jeweilige Ergebnis zu untersuchen.	Dieses Arbeitsblatt ist für Lernende jeden Leistungsvermögens geeignet. Ausgehend von angeleiteten Fragestellungen haben sie Gelegenheit, zunehmend eigene Fragestellungen einzubeziehen. Es kann in individuellem Tempo und mit individueller „Tiefe" gearbeitet werden.
*** Vertiefen 2** *Zahlenrätsel in Wort, Bild und Term* (auf CD)	Die Lernenden setzen sich mit den unterschiedlichen Darstellungsebenen parallel auseinander und setzen sie zueinander in Beziehung.	Dieses Arbeitsblatt bietet noch einmal die Möglichkeit, Erfahrungen aus den ersten Erarbeitungen zu festigen.
**** Vertiefen 3** *Vermischtes* (auf CD)	Die Lernenden setzen sich mit Fehlern, Begründungsmöglichkeiten auseinander.	
**** Vertiefen 4** *Mit Zahlenrätseln sicher werden* (auf CD)	Auswirkungen von Abänderungen der Zahlenrätsel werden mithilfe von Schachtelanordnungen untersucht und reflektiert.	
**** Vertiefen 5** *Zahlenrätsel mit großen Zahlen* (auf CD)	Die Lernenden setzen sich mit den Grenzen des „Schachtel-Hölzchen-Modells" auseinander.	Spätestens hier wird es auch für die Lernenden sinnvoll, anstelle der Schachteln „Buchstaben" zu benutzen (vgl. Erarbeiten 4). Die Bedeutung der Variablen als beliebige, unbestimmte Zahl steht hier im Mittelpunkt. Je nach Ideen der Lernenden kann es wichtig werden, Bedeutungen von Notationen wie $5s + 10\,h$ oder $5 \cdot s + 10 \cdot h$ oder $5 \cdot s + 10$ zu thematisieren und begründet Vereinbarungen zu treffen.
**** Vertiefen 6** *Terme zu Zahlenrätseln vergleichen* (auf CD)	Die Lernenden übersetzen Zahlenrätsel auf unterschiedliche Weise in Zahlterme und umgekehrt.	Die Lernenden erfahren hier, dass sich ein und dieselbe Schachtelanordnung auf verschiedene Weise mit Termen beschreiben lässt. Die Bedeutung der Klammerschreibweise lässt sich hier vertiefen – es geht weniger um das Ausrechnen selbst.

Ein Zahlenrätsel ausprobieren

Denke dir eine Zahl.
Addiere 3.
Multipliziere das Ergebnis mit 2.
Subtrahiere von diesem Ergebnis 4.
Dividiere anschließend durch 2.
Jetzt subtrahiere die gedachte Zahl.
Welches Ergebnis erhältst du?

1

a) Probiere das Zahlenrätsel aus dem Kasten rechts einige Male mit verschiedenen Zahlen aus. Halte deine Ergebnisse in einer Tabelle wie unten fest.

Text	Versuch 1	Versuch 2	Versuch 3	Versuch 4
Ich denke mir eine Zahl.				
Ich addiere 3.				
Ich multipliziere das Ergebnis mit 2.				
Ich subtrahiere 4.				
Ich dividiere anschließend durch 2.				
Jetzt subtrahiere ich die gedachte Zahl und erhalte ...				

b) Was beobachtest du?

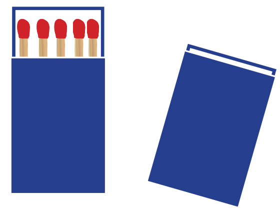
c) Ist das immer so? Vergleicht eure Ergebnisse in der Klasse.

d) Woran könnte das liegen? Schreibe es auf.

Zum Weiterdenken

Was passiert, wenn du im ersten Schritt nicht 3, sondern 4 oder 5 oder 6 addierst? Probiere es aus! Könntest du durch eine kleine Änderung des Rätsels erreichen, dass am Ende immer 10 herauskommt?
Oder immer 11? Probiere aus!

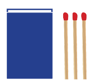
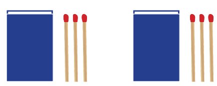
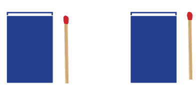
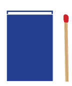
Das Zahlenrätsel darstellen und erklären



1 Hans hat sich die Zahl 5 gedacht.
Er steckt also 5 Hölzchen in jede Schachtel.
Er verschließt sie gut, damit niemand sieht,
wie viele Hölzchen in einer Schachtel sind!
Dann legt er das Zahlenrätsel nach.

a) Stecke selbst 5 Hölzchen in jede Schachtel. Legt die Schachtelanordnung nach.

b) Rechne nach! Wie passen die Ergebnisse zur Schachtelanordnung? Erklärt euch gegenseitig die einzelnen Schritte!

Text	**Schachtelanordnung**	**Versuch**				
		1	2	3	4	5
Ich denke mir eine Zahl.		5				
Ich addiere 3.						
Ich multipliziere das Ergebnis mit 2.						
Ich subtrahiere 4.						
Ich dividiere anschließend durch 2.						
Jetzt subtrahiere ich die gedachte Zahl und erhalte ...						

c) Denke dir jetzt eigene Zahlen und stecke diese Anzahl Hölzchen in jede Schachtel. Lege das Rätsel nach! Rechne nach und überprüfe!

d) Findest du jetzt mit Hilfe der Darstellung eine Erklärung dafür, dass das Ergebnis immer 1 ist? Stimmt sie mit deiner Vermutung aus Aufgabe 1 überein?

Zum Weiterdenken
Am Ende des Rätsels soll anstelle der 1 immer 6 herauskommen.
Kann dir die Schachtelanordnung helfen, das Zahlenrätsel passend abzuändern?
Finde verschiedene Möglichkeiten!

Richtiges und falsches Anordnen von Schachteln und Hölzchen

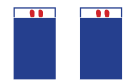
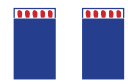
1 Lukas hat beim Legen der Schachtelanordnung kleine Fehler gemacht.

a) Welche Zahl hat er sich gedacht? Woran erkennst du das?

b) Welchen Fehler hat er gemacht?

c) Finde eine Erklärung für Lukas, warum das falsch ist und wie er das erkennen kann.

d) Korrigiere Lukas Schachtelanordnung.

Rätsel	Schachtelanordnung von Lukas
Denke dir eine Zahl.	
Verdoppele.	
Addiere 6.	
Halbiere.	
Subtrahiere 2.	
Subtrahiere deine gedachte Zahl.	

Ich erhalte immer Null!

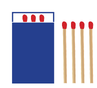
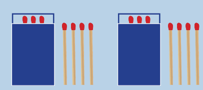
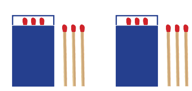
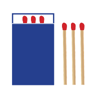
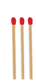
2 Lina hat ihre Schachteln und Hölzchen passend zum Zahlenrätsel gelegt.

a) Welche Zahl hat sie sich gedacht?

b) Woher kommen die 8 Hölzchen neben den Schachteln in der markierten Zeile?

c) Was hätte sich geändert, wenn sie sich eine andere Zahl gedacht hätte? Was wäre gleich geblieben?

d) Hätte Lina im letzten Schritt einfach auch die 3 Hölzchen neben der Schachtel wegnehmen können? Begründe!

Rätsel	Schachtelanordnung von Lina
Denke dir eine Zahl.	
Addiere 4.	
Verdoppele.	
Subtrahiere 2.	
Halbiere.	
Subtrahiere deine gedachte Zahl	

Ich erhalte immer 3!

Zum Weiterdenken

Ändere Lukas Zahlenrätsel so ab, dass am Ende tatsächlich immer Null herauskommt.

Ändere Linas Zahlenrätsel so ab, dass im letzten Schritt nicht die gedachte Zahl, sondern die Zahl 3 subtrahiert wird. Was ändert sich am Ergebnis?

Noch mehr Zahlenrätsel

1 Suche dir nacheinander einige der Zahlenrätsel aus.

a) Erhältst du als Ergebnis immer dieselbe Zahl?

b) Falls ja, warum ist das so? Falls nein, ändere das Zahlenrätsel so ab, dass du als Ergebnis immer die gleiche Zahl erhältst.

c) Lege auf alle Fälle auch die passende Schachtelanordnung und skizziere sie in dein Heft. Woran kannst du erkennen, ob das Endergebnis immer gleich ist oder nicht?

1.
Denke dir eine Zahl.
Verdoppele sie
und addiere dann 6.
Multipliziere das Ergebnis mit 3
und dividiere anschließend durch 6.
Subtrahiere jetzt die gedachte Zahl.
Welches Ergebnis erhältst du?

2.
Denke dir eine Zahl.
Multipliziere Sie mit 3.
Addiere 6.
Subtrahiere deine gedachte Zahl.
Halbiere das Ganze.
Subtrahiere deine gedachte Zahl
noch einmal.

3.
Denke dir eine Zahl
und verdreifache sie.
Verdoppele,
dividiere anschließend durch 6.

5.
Denke dir eine Zahl.
Addiere 6.
Verdoppele.
Subtrahiere 4.
Subtrahiere das Doppelte deiner gedachten
Zahl.

4.
Denke dir eine Zahl.
Verdreifache sie.
Addiere 6.
Verdoppele das Ergebnis.
Nimm anschließend den dritten Teil.

6.
Denke dir eine Zahl.
Addiere anschließend 3.
Multipliziere mit 6.
Subtrahiere 3.
Dividiere durch 3.
Subtrahiere das Doppelte deiner gedachten
Zahl.

2

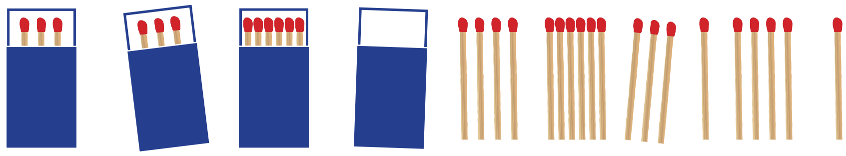
a) Wähle eine Schachtelanordnung von Aufgabe 1 c) aus. Zeige sie deiner Partnerin. Findet deine Partnerin das Zahlenrätsel heraus? Kann sie vorhersagen, ob du immer das gleiche Ergebnis erhältst?

b) Falls nötig, diskutiert miteinander Änderungsvorschläge und schreibt sie auf.

c) Wechselt euch ab.

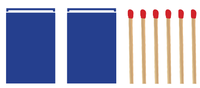
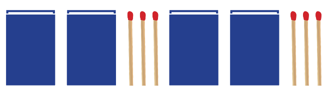
Zum Weiterdenken
Wähle ein Zahlenrätsel aus, bei dem man immer das gleiche Ergebnis erhält. Ändere es so ab, dass du die gedachte Zahl deiner Partnerin erraten kannst. Wie kann dir die Schachtelanordnung helfen, dass dir dies in Sekundenschnelle gelingt? Übe den Trick ein.

Zahlenrätsel selbst erfinden

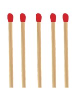


1 Ergänze die Zahlenrätsel und Schachtelanordnungen passend.

a)

Text	Schachtelanordnung
Denke dir eine Zahl.	
Addiere 6.	
Multipliziere 2.	
	

b)

Text	Schachtelanordnung
Denke dir eine Zahl.	
	
	

2 Denke dir selbst Zahlenrätsel aus.

a) Welches Ergebnis erhältst du am Ende immer?

b) Suche dir eine Partnerin und überprüfe dein Zahlenrätsel. Wechselt euch ab.

c) Vergleicht, wie ihr beim Erfinden von Zahlenrätseln vorgegangen seid.

d) Eine gute Freundin von euch hat nicht verstanden, wie sie Zahlenrätsel erfinden kann, so dass am Ende alle das gleiche Ergebnis erhalten. Schreibt eine Anleitung für sie, so dass sie es gut verstehen kann.

e) Übt ein Zahlenrätsel ein und präsentiert es vor der Klasse!

Zum Weiterdenken
Könnt ihr auch ein Zahlenrätsel erfinden, bei dem ihr die gedachte Zahl eurer Partnerin erraten könnt? Was könntet ihr an eurem Zahlenrätsel aus Aufgabe 2 ändern?

x-beliebig – Einstieg in die Algebra

je nach Einsatz

Kompetenzen

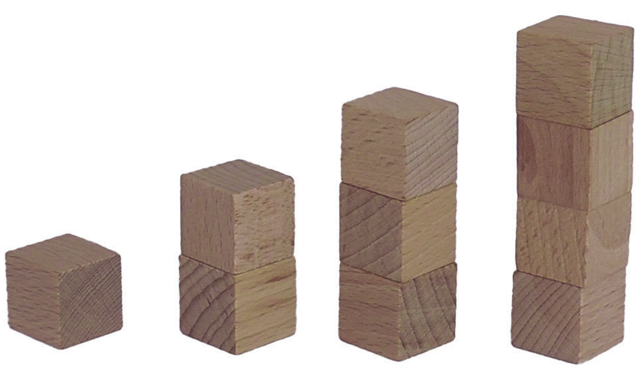
- **inhaltlich:** Muster und Strukturen in Wort und Term beschreiben; inhaltlich bedeutsame Begriffe wie „Variable“ und „Term mit Variable“ entwickeln, Terme auf verschiedene Weise geometrisch deuten, Terme auf der Beschreibungsebene auf Äquivalenz untersuchen, Einsetzungsgleichheit äquivalenter Terme nutzen
- **prozessbezogen:** Muster und Strukturen in unterschiedlichen Würfelbauten entdecken, Regeln formulieren und sprachlich, bildlich und symbolisch (als Term) darstellen; Gesetzmäßigkeiten und Terme auf verschiedenen Darstellungsebenen erklären und begründen

Material

- ein Satz von ca. 30 Würfeln je Schülerin bzw. Partnergruppe
- Arbeitsblätter und Sichern-Karten (Material im Koffer)
- eine handelsübliche Streichholzschachtel mit Streichhölzern pro Schülerin
- Hausübungen *Hölzchenketten-Aufgaben* (auf CD)

Möglicher Unterrichtseinsatz/Differenzierung

Viele Schülerinnen erfassen die Bedeutung der Variablen (insbesondere in Bezug auf das Verallgemeinern) zu wenig, so dass die Algebra oft ein bedeutungsloses Rechnen mit Buchstaben wird. Hier soll mit Folgen von Würfelbauten und Streichholzketten enaktiv ein (Lernschwierigkeiten antizipierender) Weg beschritten werden, der behutsam zur Gleichwertigkeit von Termen durch den Aufbau inhaltlich bedeutsamer Vorstellungen führt. Das algebraische Kalkül entwickelt sich dann mit und aus diesen Vorstellungen. Insofern bietet es sich an, die Karten *Erarbeiten 1* und *Erarbeiten 2* bereits in Jahrgangsstufe 5 – z. B. im Rahmen einer Unterrichtseinheit zu „den Vorfahrtsregeln“ – für einen grundlegenden Einstieg zu nutzen. Gerade die einführenden Aufgaben kommen, wie später noch erläutert, ohne die Verwendung von Variablen aus – die entsprechenden Gesetzmäßigkeiten können und sollen anhand von Zahltermen entdeckt und versprachlicht werden, wie das folgende Beispiel zeigt.
Im Zusammenhang mit Folgen von Würfelgebäuden können unterschiedliche Dinge gezählt werden:
Die Anzahl der Würfel, die Anzahl der sichtbaren oder verdeckten Quadrate (Seitenflächen) sichtbar. Wie viele sichtbare Quadrate wären es denn beim 100. (bei einem x-beliebigen) Turm? Auch Schülerinnen einer 5. oder 6. Klasse können herausfinden, dass man diese Anzahl für den dritten Turm beispielsweise mithilfe des Zahlterms $1 + 3 \cdot 4$ sehr schnell bestimmen kann (die Punkt-vor-Strich-Regel wird hier plausibel). Andere entdecken schon, dass man die Anzahl der sichtbaren Quadrate bei einem beliebigen Turm z. B. immer mit folgender „Zählregel“ erhält: „Die Anzahl der Würfel mal 4 und dann noch 1 dazu.“ Probieren Sie es aus, durch die Beschäftigung mit solchen Fragen erhalten „Terme mit Variablen“ von Anfang an eine inhaltliche Bedeutung!



Was man genau unter der Anzahl sichtbarer bzw. verdeckter Quadrate versteht, muss mit den Schülerinnen vor dem eigenständigen Erarbeiten genau geklärt werden. Dann erfolgt das Erarbeiten in Kleingruppen mit Hilfe der „Erarbeiten-Karten".
Zu einer Folge von Würfelgebäuden finden dann die Schülerinnen i. d. R. je nach Zählweise mehrere unterschiedliche Terme, die alle die korrekten Anzahlen beschreiben. Während einige Schülerinnen sehr stark auf das Zählen anhand der konkreten Bauwerke angewiesen sind, kann es anderen schon bald gelingen, allgemeingültigeTerme zu finden oder zumindest allgemeingültige „Zählregeln" zu formulieren. Wichtig ist, dass die unterschiedlichen Zählweisen von den Schülerinnen (z.B anhand der Bauwerke bzw. mithilfe von Skizzen) erklärt werden. Dies kann entweder mithilfe der „Sichern-Karten" geschehen oder alternativ hierzu in Plenumsphasen. Den Schülerinnen sollte es hier gelingen, nicht nur ihr eigenes Zählverfahren auf beliebige natürliche Zahlen anzuwenden, sondern auch mindestens ein weiteres Zählverfahren im direkten Zusammenhang mit dem entsprechenden Bauwerk bzw. der Skizze erläutern und es ebenfalls für viele konkrete natürliche Zahlen anwenden zu können. Auch dies ist bereits in Klasse 5 ein wichtiges Ziel, da es schon hier bewusst macht, dass unterschiedliche Zahlterme die gleiche Situation beschreiben können.

Erst dann ist es für viele Kinder in höheren Jahrgangsstufen möglich zu erkennen, dass ein solches Zählverfahren wirklich allgemeingültig für unbestimmte Zahlen angewendet werden kann.
Einerseits können die Schülerinnen mit den Arbeitsaufträgen weitestgehend selbständig und selbst-differenzierend arbeiten, andererseits sind aber Ankerpunkte (sehr) wichtig, an denen die individuellen Lernwege und Ergebnisse zusammengeführt und gesichert werden. Ein Angebot dafür sind die „Sichern-Karten" – diese können aber auch durch Plenumsphasen ersetzt werden, wenn es der Lerngruppe schwerfällt, sich das Ordnen und Systematisieren selbständig anzueignen.

Der Übergang von „eigenen Zählverfahren" zu „Termen mit Variable" wird explizit erst ab *Erarbeiten 3* eingefordert. Es passiert aber immer wieder, dass einzelne Schüler schon früher „Terme mit x" aufstellen. Nach *Erarbeiten 2* und vor *Erarbeiten 3* sollte dann (im Plenum oder mit der entsprechenden Sichern-Karte) das Aufstellen von Termen für alle gesichert werden. Danach wird es erforderlich sein, die Schülerinnen immer wieder darauf hinzuweisen, wofür jeweils das x und wofür jeweils der Term steht!

In dieser Reihe werden von den Schülerinnen selbst eine Vielzahl unterschiedlicher Terme aufgestellt, die die gleiche Situation beschreiben – es empfiehlt sich diese zu sammeln (dazu befindet sich auf der CD die Datei „terme_sammeln.pdf"). Einzelne Schülerinnen sollten den Termen die Gleichwertigkeit spätestens ab *Erarbeiten 4* auch ansehen. Schreitet man nach der Reihe weiter in Richtung „Aufbau des Kalküls" fort, kann man diese Schülerprodukte und Vorstellungen an gegebener Stelle aufgreifen, um dann die Äquivalenz der Terme durch Umformen nachzuweisen.
Für interessierte Schülerinnen enthält jedes Arbeitsblatt einen Auftrag „Zum Weiterdenken". Zusätzlich eignen sich dafür auch die Arbeitsblätter *Üben und Vertiefen, Vertiefen 2* und *Vertiefen 3*.

Da die Schülerinnen zuhause keine Würfel zur Verfügung haben, empfiehlt es sich parallel zuhause Muster und Strukturen an Streichholzketten untersuchen zu lassen – jeder Schüler braucht dazu lediglich eine volle Streichholzschachtel. In den Zusatzmaterialien *Hölzchenketten-Aufgaben* auf der CD befindet sich dazu ein paralleler Lerngang für Zuhause.

Es müssen nicht alle Karten bearbeitet werden. Für die gesamte Reihe muss man mit einem Zeitrahmen von ca. 3 Wochen planen – nach *Erarbeitung 4* sind jedoch alle fachlichen Inhalte bearbeitet und man kann selbst entscheiden, wie lange man noch übt und vertieft.

Hinweis:
Nach: Affolter, Walter et al: Das Mathematikbuch 7 – Lernumgebungen, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2010, S. 8 ff.

Lösungen zu den Arbeitsblättern

Hier ist jeweils exemplarisch nur der „einfachste" Term für das zentrale Würfelgebilde der jeweiligen Erarbeitung angegeben. Weitergehende Lösungen und Hinweise (auch für die Vertiefungen) befinden sich auf der CD.

	sichtbare Quadrate	verdeckte Quadrate
E 1 - Würfeltürme	$4x + 1$	$2x - 1$
E 2 - Würfelschlangen	$3x + 2$	$3x - 2$
E 3 - Würfelmauern	$5x + 4$	$7x - 4$

	Würfel
E 4 - gestaffelte Würfelmauern	$3x + 1$
Ü. u. V - Mauern mit Zinnen	$3x - 1$

Übersicht über die Inhalte der Arbeitsblätter und Sicherungskarten

Sie finden sie alle als Arbeitskarten im Koffer.

Arbeitsblatt/bzw. Karte	**Aktivität**	**Kommentar**	**Passende Hausübung mit Hölzchenketten**
Erarbeiten 1 *Würfeltürme*	Schülerinnen bauen Würfeltürme, suchen Gesetzmäßigkeiten, erklären und kommunizieren diese.	Jede Schülerin entdeckt auf ihre eigene Art und Weise und in ihrem eigenen Tempo.	*H1, H2* Abzählen, allererste Systematisierungen
Sichern 1 – *Systematisches Zählen* *und/oder* **Sichern 2a –** *Systematisches Zählen bei der Würfelschlange*	Ergebnisse werden zusammengeführt – Plenum und/oder mit Sichern-Karte 1.	Schülerinnen-Strategien werden besprochen und bewertet.	
Erarbeiten 2 *Würfelschlangen*	Schülerinnen bauen Würfeltürme, suchen Gesetzmäßigkeiten, erklären und kommunizieren diese und versuchen systematisch vorzugehen.	Spätestens hier werden einzelne Schülerinnen schon erste Terme mit Variable aufstellen – das kann für die folgende Sicherung genutzt werden.	*H3, H4* Diskutieren und Aufstellen von „Zählregeln"; als HA geeignet wäre auch die Sichern-Karte 2a

Sichern 2b *Eine x-beliebige Würfelschlange*	Das Aufstellen von „Termen mit Variable“ wird systematisiert. Plenum und/oder Sichern-Karte 2b	Verwendet man die Sichern-Karte 2b, so helfen hier die Farben sehr.	
Erarbeiten 3 *Würfelmauern*	Schülerinnen finden unterschiedliche Terme für Würfelmauern und erklären diese.	Erstmalig liegt hier ein Schwerpunkt auf dem Aufstellen von Termen.	*H5* Aufstellen und Erklären beschreibungsgleicher Terme
Erarbeitung 4 *Gestaffelte Würfelmauern*	Schülerinnen erläutern das zugrundeliegende Zählverfahren zu vorgegeben Termen und erfahren durch Ausprobieren, dass die Beschreibungsgleichheit die Einsetzungsgleichheit impliziert.	Die entsprechenden Zählweisen sind sehr analog zu denen bei den „gesicherten“ Würfelschlangen.	*H5, H6, H7, H8*
Sichern 3 *Einsetzungsgleichheit*	Implikation, Beschreibungsgleichheit, Einsetzungsgleichheit	Da hier die Einsetzungsgleichheit ein Schwerpunkt ist, dürfen die Schülerinnen ruhig annehmen, dass die Terme richtig sind. Hier muss gesichert werden, dass die Umkehrung der Implikation i.d.R. nicht gilt.	*H6, H7, H9*
Üben und Vertiefen *Würfelzinnen*	Anwenden und Einüben aller bislang erarbeiteten Strategien Finden geeigneter Würfelbauten zu vorgegebenen Termen	Möchte man hier die Gelegenheit ergreifen, dass dreidimensionale Zeichnen zu üben, so können die Würfelbauten z.B. auf Punktmusterpapier gezeichnet werden.	*H6, H7, H8, H10* Aufgaben eignen sich auf unterschiedlichen Differenzierungsniveaus zum Sichern, Üben und Vertiefen.
Vertiefen 2 *Weitere Würfelgebäude*	Untersuchung komplexer und selbsterfundener Würfelgebäude	Aufgabe 1 bietet die Möglichkeit auf unterschiedl. Differenzierungsniveaus kreativ zu werden. Die komplexeren Gebilde führen auf quadratische Terme (die wohl nur von leistungsstärkeren Schülerinnen zu erwarten sind) – Muster und Strukturen können aber trotzdem erkannt werden.	*H9* H9 ist völlig analog zur „Kreativitätsaufgabe“ 1 in Vertiefung 2.
Vertiefen 3 *Würfelgebäude u. lineare Zuordnungen.*	Schülerinnen entdecken einen Zusammenhang mit linearen Zuordnungen und eine alternative (funktionale) Strategie einen Term zu finden.	Das ist nur sinnvoll, wenn lineare Zuordnungen schon behandelt wurden.	Das Finden der Terme bei *H10* wird so stark vereinfacht.

Arbeitskartei - Variablen haben verschiedene Bedeutungen

3 – 4 Stunden

Kompetenzen

- **inhaltlich:** Bedeutung von Variablen und Termen wiederholen und vertiefen.
- **prozessbezogen:** mit Strecken und Längen Zusammenhänge bei Variablen begründen; Lösungswege übersichtlich darstellen.

Material

14 Arbeitskarten (Material im Koffer)

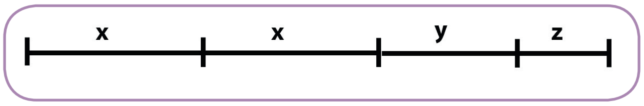
Möglicher Unterrichtseinsatz/Differenzierung

Die Arbeitskartei soll dazu dienen, das Variablenverständnis zu vertiefen und zu festigen. Sie ist einsetzbar, wenn bereits mit Variablen, Termen und Gleichungen gearbeitet wurde, dient also als vertiefende Wiederholung. Es werden vor allem Veranschaulichungen in Form von Strecken oder als Tabellen gewählt, die geeignet sind, die Begrifflichkeiten auf ein einfaches Niveau zu bringen, ohne aber trivial zu sein. Bei der Auswahl der Aufgabenstellungen wurde vor allem Wert darauf gelegt, Begründungen für das eigene Vorgehen zu erwarten bzw. die Zusammenhänge zwischen den jeweils unterschiedlichen Darstellungen beschreiben zu lassen. Das soll helfen zu hinterfragen, ob die zentralen Begriffe und Zusammenhänge verstanden wurden. Es soll gleichfalls verhindern, dass Rechenregeln unverstanden angewendet werden.
Im Unterricht hat sich Gruppenarbeit bewährt: Einzelne Karten werden zunächst alleine bearbeitet und dann in der Gruppe besprochen. Es sollten nicht nur Ergebnisse verglichen werden, sondern auch die Argumentationen vorgestellt werden, am besten mehrere unterschiedliche. Die Lehrerin nimmt die Rolle der Beobachterin ein, bei Problemen ist sie Unterstützerin. Ein bewährtes methodisches Element bei Problemen ist, zunächst die (Tisch-)Gruppe mit der Hilfe zu beauftragen. Sollte das nicht erfolgreich sein und/ oder sollten sich bei mehreren Schülerinnen Schwierigkeiten mit ähnlichen Aspekten der Arbeitskarten ergeben, kann diese kleine Gruppe an einem Tisch oder um die Tafel versammelt werden. Zusammen mit der Lehrkraft versucht sie dann, die Schwierigkeiten zu beseitigen.
Die Tabelle unten gibt einen Überblick über die Schwerpunkte der einzelnen Arbeitskarten.

Nummer	Intention
Teil 1: Variable, Terme als Streckenlängen deuten, Gleichungen durch Streckenvergleich veranschaulichen	
1	Variable können für x-beliebige Streckenlängen stehen. Streckenlängen verändern sich, je nachdem welche Zahlen man einsetzt. *Einsetzungsaspekt: Variable als Veränderliche*
2	Gleiche Strecken können durch verschiedene Terme beschrieben werden. Termumformungen können durch Strecken veranschaulicht werden. *Gegenstandsaspekt: Variable als Unbestimmte (x-beliebige Zahl)*
3	Terme und Strecken werden zueinander in Beziehung gesetzt. *Gegenstandsaspekt: Variable als Unbestimmte (x-beliebige Zahl)*
4	Größenverhältnisse zwischen Variablen werden mithilfe von Strecken überprüft. *Gegenstandsaspekt: Variable als Unbestimmte (x-beliebige Zahl)*
5	Differenzen (Terme wie a – b) werden als Streckenlängen gedeutet. *Gegenstandsaspekt: Variable als Unbestimmte (x-beliebige Zahl)*
6	Das „Streckenbild“ wird als Hilfe zum Aufstellen von *Gleichungen* kennengelernt. Jede der Variablen in Gleichungen wird (anschaulich) mithilfe der anderen dargestellt. *Gegenstandsaspekt: Variable als Unbestimmte (x-beliebige Zahl)*
7	Das Streckenbild wird benutzt, um Gleichungen nach unterschiedlichen Variablen „aufzulösen“. *Gegenstandsaspekt: Variable als Unbestimmte (x-beliebige Zahl)*
Teil 2: Variable, Terme und Gleichungen in Sachkontexten deuten – (teilweise) anhand von Streckenbildern veranschaulichen	
8	Gleichungen werden als Sachgeschichten gedeutet und umgekehrt. Strecken und Tabellen werden genutzt, um passende Gleichungen aufzustellen. *Einsetzungsaspekt: Variable als Veränderliche*
9	Gleichungen zu Sachkontexten aufstellen – das Einsetzen von Zahlen wird als Hilfsmittel zur Überprüfung genutzt. *Einsetzungsaspekt: Variable als Veränderliche*
10	Geschichten, Gleichungen und Streckenbilder sind unterschiedliche Darstellungen des gleichen Sachverhalts. *Einsetzungsaspekt: Variable als Veränderliche;* *Gegenstandsaspekt: Variable als Unbestimmte (x-beliebige Zahl).*
11	Eine Sachsituation wird in eine Gleichung übersetzt, Tabelle und Strecken als Hilfsmittel benutzt. *Einsetzungsaspekt: Variable als Veränderliche;* *Gegenstandsaspekt: Variable als Unbestimmte (x-beliebige Zahl).*
12	Sachkontexte zur prozentualen Veränderung werden mit Strecken veranschaulicht und entsprechende Terme gefunden. *Gegenstandsaspekt: Variable als Unbestimmte (x-beliebige Zahl).*
13	Gleichungen werden in andere eingesetzt; die Veranschaulichung erfolgt mit Strecken und Geschichten. *Einsetzungsaspekt: Variable als Veränderliche;* *Gegenstandsaspekt: Variable als Unbestimmte (x-beliebige Zahl).*
14	Geschichten werden in Gleichungen übersetzt und umgekehrt (Hilfsmittel eigener Wahl). *Einsetzungsaspekt: Variable als Veränderliche;* *Gegenstandsaspekt: Variable als Unbestimmte (x-beliebige Zahl).*

Karte 1:

a) Auf der Karte ist die Strecke $2 \cdot x + z = 75$ mm lang.
Für $x = 8$ cm und $z = 2$ cm wäre die Strecke insgesamt 18 cm lang.



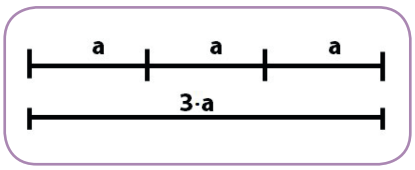
b) Auf der Karte ist die Strecke rund 97 mm lang.
Für $x = 8$ cm, $y = 5$ cm und $z = 2$ cm wäre die gesamte Strecke 23 cm lang.

Zum Weiterdenken

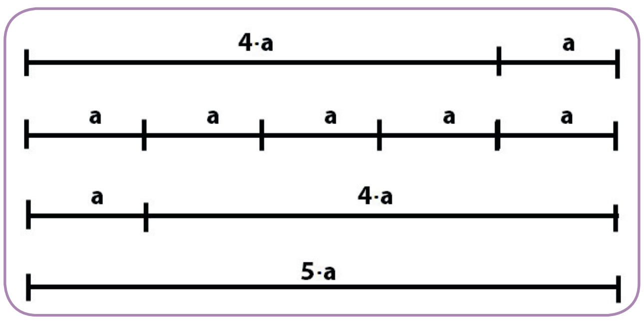
Mögliche Lösungen sind z. B.:
$x = 6$ cm, $y = 3$ cm und $z = 1$ cm
$x = 4$ cm, $y = 4$ cm und $z = 4$ cm
$x = 3$ cm, $y = 4$ cm und $z = 6$ cm

Karte 2:

a)



b) und c)



Ein kürzerer Term für $a + 4 \cdot a$ ist $5 \cdot a$.
Anstelle von $a + 4 \cdot a$ könnte man auch schreiben $1 \cdot a + 4 \cdot a$.
Anhand der Zeichnung kann man sehen, dass $a + 4 \cdot a$ gleich lang ist wie $4 \cdot a + a$.
Also gilt $a + 4 \cdot a = 4 \cdot a + a$.

d) Man kann sich das vorstellen wie ein „Zoom“. Wenn man für jedes a eine längere Strecke wählt, dann wird das Bild insgesamt – wie beim Zoom – größer. Wichtig ist nur, dass man jede Strecke a gleich lang zeichnet.

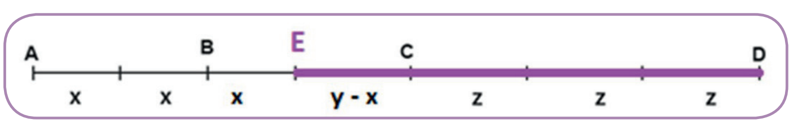
Zum Weiterdenken

Mögliche Lösungen: $5 \cdot a = a + a + a + a + a = 2 \cdot a + 3 \cdot a = 3 \cdot a + 2 \cdot a = 2 \cdot a + a + a + a = \ldots$

Karte 3:

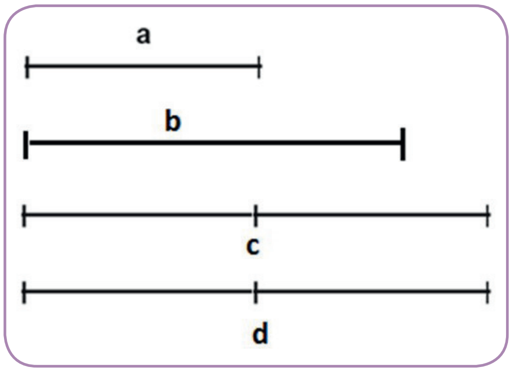
a) $[BD] = y + 3 \cdot z$ b) $[AC] = 2 \cdot x + y$

Zum Weiterdenken



Karte 4:

a) /b)



c)

Behauptung	Richtig	Falsch	Das kann man nicht entscheiden
$a > b$	☐	☒	☐
$c = d$	☒	☐	☐
$b > c$	☐	☐	☒
$a + b > c$	☒	☐	☐

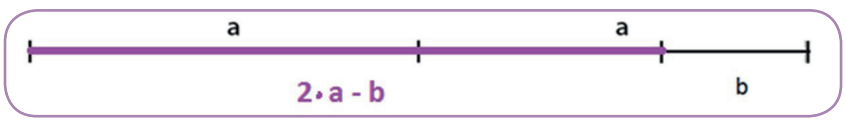
Zum Weiterdenken

Man könnte b noch verlängern, dann wäre es irgendwann länger als c. Das liegt daran, dass es sich um Variable handelt, für die man beliebige Längen einsetzen darf. Die einzige Bedingung ist in dieser Aufgabe, dass die Länge b größer sein soll als die Länge a.

Karte 5

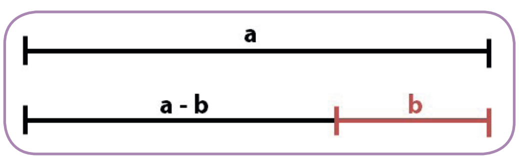
a) Wenn b größer als a wäre oder gleich groß, könnte man keine Strecke mit der Länge $a - b$ zeichnen.

b)



c) Es passen die Terme $a - b - b$ oder $a - 2 \cdot b$

Zum Weiterdenken

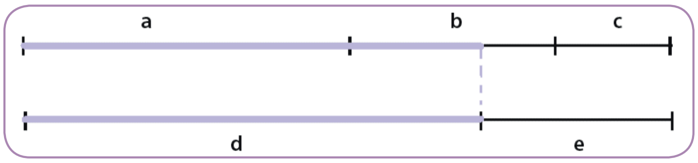


Man erkennt im Streckenbild, dass die Längen $a - b$ und die Länge b zusammen die Länge a ergeben. Wenn man also von der Länge a die Länge b subtrahiert, erhält man die Restlänge $a - b$.
Wenn man umgekehrt von der Länge a die Länge $a - b$ subtrahiert, erhält man die Restlänge b.
Also gilt: $a - (a - b) = b$

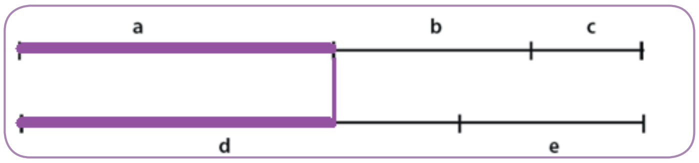
Karte 6

a) Welche Gleichung passt zu den blauen Strecken?

☐ a + b = d – e
☒ d = a + b + c – e
☐ c = d – (a + b)



b)



c) c ist gleich lang wie die Reststrecke, wenn ich von der Strecke d + e die Strecke (a + b) subtrahiere, also c = (d + e) – (a + b) oder c = d + e – a – b

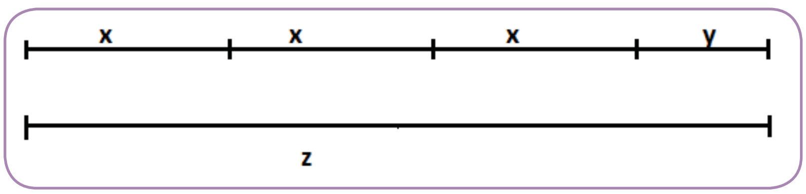
Zum Weiterdenken

Weitere Gleichungen sind
- a = (d + e) – (b + c) oder a = d + e – b – c
- b = d + e – (a + c) oder b = d + e – a – c
- e = a + b + c – d

Solche Umformungen können helfen, wenn man in Formeln (z. B. der Formel für den Flächeninhalt) eine Variable durch die anderen ausdrücken möchte.

Karte 7

a)



b) Ich kann z. B. für x und für y jeweils beliebige Streckenlängen wählen. Beachte: Wenn die Länge für x einmal gewählt ist, muss sie beibehalten werden. Die Länge für z ergibt sich dann daraus.

c) y = z – 3 · x.

Zum Weiterdenken

Emil könnte z. B. auch zuerst die Längen für z und y festlegen (z muss größer sein als y), dann ist die Strecke 3 · x festgelegt. Diese Strecke ist genauso lang wie die Strecke z – y. Also muss er diese Reststrecke noch durch 3 teilen, dann hat er die Länge für x.

Karte 8

a) In einem Stall sind 4 Hasen mehr als Gänse. Oder: In einem Stall sind 4 Gänse weniger als Hasen.

Anzahl Gänse	Anzahl Hasen
6	10
13	17
20	25
96	100
g	g + 4
h – 4	h

d) Ergänze die Gleichung: g = h – 4

Zum Weiterdenken
So viele Gänse und Hasen sind es zusammen:
$g + g + 4$ oder $2 \cdot g + 4$ oder $2 \cdot h - 4$
Auf einer Wiese sind es 10 Gänse weniger als Hasen: $g = h - 10$ oder $h = g + 10$

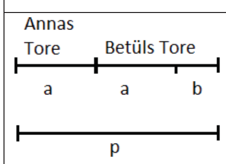
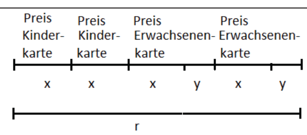
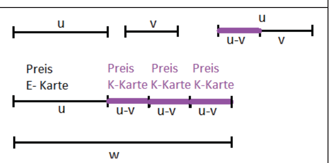
Karte 9
a) ☐ $G = x + y$ ☐ $G = x - y$ ☒ $G = x + x - y$ ☐ $G = y - x$
☐ $G = 2 \cdot y - x$ ☒ $G = 2 \cdot x - y$ ☐ $G = 2 \cdot (x - y)$ ☐ $G = y + 2 \cdot x$
b) Bei den grau gefärbten Feldern gibt es viele unterschiedliche Möglichkeiten.

Preis in € für eine Erwachsenenkarte	So viel Euro kostet eine Kinderkarte weniger	Preis in € für eine Kinderkarte	Gesamtpreis in € für Mutter und Sohn
12	3	9	21
12	4	8	20
15	10	5	20
14	4	10	24
10	5	5	15
x	y	x - y	2 · x – y

Zum Überprüfen kann man z. B. die Werte aus Zeile 1 in die Gleichungen aus a) einsetzen. Hättest du z.B. die Gleichung $G = x + y$ angekreuzt, dann ergäbe das $G = 12 + 3 = 15$, und das ist falsch! Es muss ja 21 herauskommen.

Zum Weiterdenken
$y = 2 \cdot x - G$
Ich erhalte den Betrag, den die Kinderkarte weniger kostet, indem ich vom Gesamtpreis 2 mal den Preis einer Erwachsenenkarte abziehe.
$x = (G + y) : 2$

Karte 10
a) r steht für die Anzahl der Tore, die Rico wirft. s steht für die Anzahl der Tore, die Thilo mehr wirft als Rico. r + s steht dann also für die Anzahl der Tore, die Thilo wirft.
b) Es gibt eine Vielzahl passender Geschichten, hier findest du jeweils ein mögliches Beispiel.

$p = 2 \cdot a + b$	$r = 2 \cdot x + 2 \cdot (x + y)$	$w = u + 3 \cdot (u - v)$
Anna schießt a Tore, Betül schießt b Tore mehr, zusammen schießen sie p Tore.	Mutter und Vater gehen mit ihren beiden Kindern ins Kino. Eine Kinderkarte kostet x Euro, eine Erwachsenenkarte kostet y Euro mehr. Zusammen bezahlen sie dann r Euro.	Ein Vater geht mit seinen 3 Kindern ins Schwimmbad. Eine Erwachsenenkarte kostet u Euro, eine Kinderkarte kostet v Euro weniger. Zusammen kostet es w Euro.
		
Der Term $2 \cdot a + b$ beschreibt die Anzahl der Tore von Anna und Betül zusammen.	Der Term $2 \cdot x + 2 \cdot (x + y)$ beschreibt die Gesamtkosten für die vier Kinokarten.	Der Term $u + 3 \cdot (u - v)$ beschreibt die Gesamtkosten für die vier Eintrittskarten.
Weitere Gleichungen: $p = a + a + b$ $b = p - 2 \cdot a$ $a = (p - b) : 2$	Weitere Gleichungen: $r = 4 \cdot x + 2 \cdot y$ $x = (r - 2 \cdot y) : 4$ $y = (r - 4 \cdot x) : 2$	Weitere Gleichungen: ((Diese lassen sich nicht mehr mit dem Streckenbild begründen)) $w = 4 \cdot u - 3 \cdot v$ $u = (w + 3 \cdot v) : 4$ $v = (4 \cdot u - w) : 3$

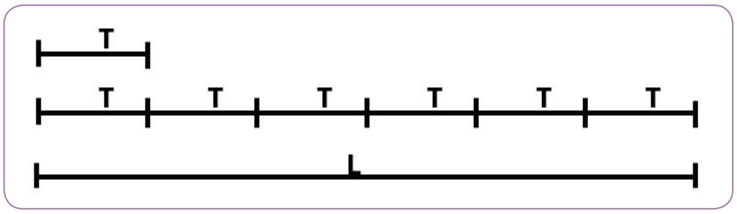
Karte 11

a) T steht für die Anzahl der Trainerinnen, L steht für die Anzahl der Läuferinnen

b)

T	L
1	6
2	12
3	18
10	60
T	$6 \cdot T$

c)



Die Strecke für die Anzahl der Läuferinnen muss 6-mal so lang sein wie die Strecke für die Anzahl der Trainerinnen.

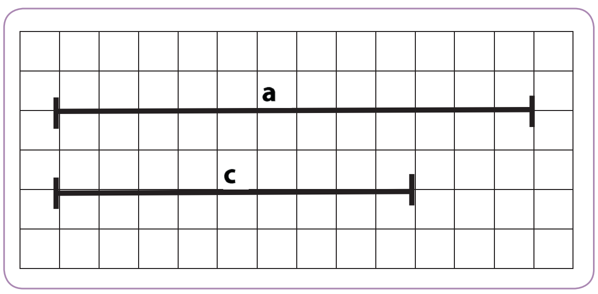
d) $L = 6 \cdot T$ oder $T = L : 6$

Karte 12

a) Übertrage die Zeichnung in dein Heft.
Was wird durch die Strecke b dargestellt? Übertrage die richtige Antwort in dein Heft.

- ☐ Der Preis um 20 € erhöht.
- ☒ Der Preis hat sich um 20 % erhöht.
- ☒ Der Preis wurde auf 120 % erhöht.
- ☐ Das kann man nicht sagen, weil man ja auch nicht weiß, wie groß a ist.

b)



Zum Weiterdenken

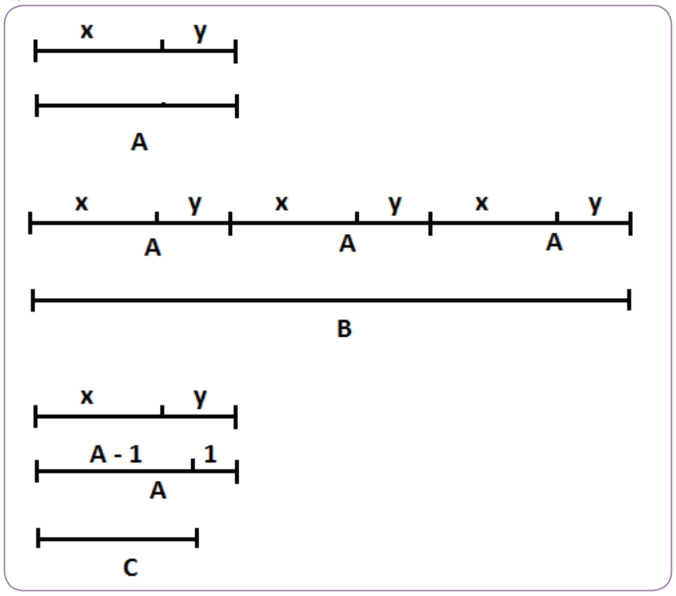
Welche Gleichungen passen? Drücke b und c jeweils mithilfe der Variablen a aus.

$b = 1{,}2 \cdot a$ oder $b = \frac{6}{5} \cdot a$ $c = 0{,}75 \cdot a$ oder $c = \frac{3}{4} \cdot a$

c = ____________

Karte 13

a)



Die Strecke B ist dreimal so lang wie die Strecke A.

Die Strecke C ist um 1 Einheit kürzer als die Strecke A.

x	y	A	B	C
4	3	7	21	6
5	3	8	24	7
5	4	9	27	8

b) Mögliche Geschichte: Mona trainiert Langlauf. Montags läuft sie x Kilometer, donnerstags läuft sie y Kilometer. Nach 3 Wochen ist sie dann insgesamt A Kilometer gelaufen. In der nächsten Woche läuft sie einen Kilometer weniger als sonst (sie nennt das eine „kurze Woche"), das sind dann nur C Kilometer.

c) $B = 3 \cdot (x + y)$

d) $C = x + y - 1$

Zum Weiterdenken

Mögliche Geschichte zu A + B: In vier Wochen läuft Mona normalerweise A + B Kilometer.
Mögliche Geschichte zu $B - 3 \cdot C$: So viele Kilometer läuft Mona in 3 „normalen Wochen" mehr als in drei „kurzen Wochen".

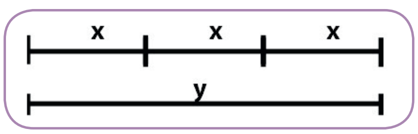
Karte 14

a) und b) $y = 3 \cdot x =$ oder $x = y : 3$

Mögliche Tabelle:

Anzahl der Tore Lena	Anzahl der Tore von Lisa
3	9
4	12
x	$3 \cdot x$

Streckenbild:



c) Normalerweise kostet der Eintritt ins Schwimmbad b Euro.
Heute ist es einen Euro billiger. Lena und Lisa müssen dann zusammen a Euro bezahlen.

Normaler Preis	Reduzierter Preis	Gesamtpreis für Lena und Lisa
3	2	4
5	4	8
b	$b - 1$	$2 \cdot (b - 1)$

d) Diese Situation lässt sich nicht mehr so einfach mit einem Streckenbild veranschaulichen (es ist aber möglich).

Knack die Box 1

Je nach Einsatz 6–10 Stunden

Kompetenzen

- **inhaltlich:** lineare Gleichungen durch Probieren und algebraische Umformungen lösen
- **prozessbezogen:** Lösungswege vergleichen und bewerten, Begriffe und Verfahren miteinander in Beziehung setzen, mathematisches Wissen für Begründungen nutzen, Vorgehensweise zur Lösung eines Problems planen und beschreiben, Algorithmen zum Lösen mathematischer Standardaufgaben nutzen, Lösungswege auf Richtigkeit und Schlüssigkeit überprüfen

Material

- 70 Schachteln
- 500 Hölzchen ohne Kopf
- Arbeitsblätter (S. 56–61)
- Kopiervorlage Gleichheitszeichen (Material im Koffer)

Möglicher Unterrichtseinsatz

Voraussetzung für diese Reihe ist ein Grundverständnis der Schülerinnen für Termumformungen (siehe *Rennstrecken*). Sonst ist die Reihe ohne Vorkenntnisse durchführbar. Diese Reihe orientiert sich an dem E-I-S-Prinzip; d.h. dass nacheinander mit enaktiven, ikonischen und auch symbolischen Darstellungsformen gearbeitet wird und die Umformungsschritte von einer Darstellung in eine andere geübt werden. Dafür wird von einer konkret-anschaulichen Darstellung (Arbeiten mit Schachteln und Hölzchen) allmählich zu einer abstrakten-symbolischen Darstellung (systematische Umformung von Gleichungen) übergegangen, wobei die Schülerinnen immer noch die Verbindung zum Konkreten herstellen können. Dies bedeutet, dass die Lernenden zunächst die Frage „Wie viele Hölzchen sind in der Schachtel?“ rein intuitiv und handlungsorientiert bearbeiten und lösen. Danach werden diese Probleme zeichnerisch gelöst und das Verfahren der Umformungen wird thematisiert. In dieser Stelle sollte auch der Vorteil von Umformungen gegenüber den vorherigen Verfahren thematisiert werden. Zuletzt bearbeiten die Lernenden diese Probleme auf der symbolischen Ebene und lösen sich von dem Schachtel-Hölzchen-Modell.

Zu den einzelnen Einheiten:

Die Reihe ist für eine Gruppenarbeit für bis zu 8 Gruppen konzipiert. Daher sind auch alle Arbeitsaufträge im Plural formuliert. Dennoch ist es sinnvoll, Teile auch in Partner- oder Stillarbeit bearbeiten zu lassen oder nach einer ersten Arbeitsphase eine ausführliche Besprechung und Zwischensicherung durchzuführen. Mit OHP oder Dokumentenkamera können Lösungswege präsentiert werden. Die Sichern-Karten (Material im Koffer) unterstützen dabei. Es kann sinnvoll sein, an einer Stelle im Klassenraum Lösungen zum Ansehen auszulegen bzw. anzuheften oder individuelle Rückmeldungen zu geben.

Die Grundidee zum Gleichungslösen erarbeiten die Schülerinnen auf dem ersten Arbeitsblatt *Schachteln knacken*. Auf die Vereinbarung, dass auf beiden Seiten und in jeder Schachtel immer gleich viele Hölzchen liegen, müssen sie im Laufe der Reihe immer wieder zurückgreifen, da dies für das Verständnis der Gleichung und der Variable fundamental ist. Der offene Einstieg lässt unterschiedliche Ansätze zur Lösung von Schachtelgleichungen finden, diese sollten in einer anschließenden Sicherungsphase aufgegriffen werden (evtl. mit der *Sichern-Karte 1: Umformungen von Schachtelanordnungen*).

Hier lassen sich die Schülerstrategien und die Einführung einer systematischen Schreibweise zusammenführen. Die Situation kann jeweils haptisch und visuell nachgelegt werden. Da es an dieser Stelle lediglich um das Wegnehmen (Subtrahieren) und Aufteilen (Dividieren) geht, braucht der Begriff der Äquivalenzumformung noch nicht benutzt werden.

Das Arbeitsblatt *Schachteln knacken durch Umformen* trainiert das systematischere Lösen und führt die Probe ein. In der Gruppenarbeitsphase können die Materialien erneut zur Visualisierung zur Verfügung gestellt werden. Standardfehler werden vorgeführt, um die Schülerinnen dafür zu sensibilisieren.

Bei *Sichern-Karte 2: Von der Schachtelgleichung zur algebraischen Gleichung* abstrahieren die Schülerinnen von den konkreten Hölzchen und Schachteln zu (natürlichen) Zahlen und Variablen. Der Wechsel zwischen Schachtelmodell (enaktiv/ikonisch) und abstrakter Schreibweise (symbolisch) wird auf dem folgenden Arbeitsblatt Schachtelgleichungen in beide Richtungen geübt. Schülerinnen, die sich noch unsicher sind, sollten die Materialien als legitime Hilfestellung auch weiterhin nutzen. Die letzte Aufgabe (Zum Weiterdenken) zeigt die Grenzen des Modells „Schachteln und Hölzchen" auf. Da es dazu genügend Aufgaben in den Schulbüchern gibt, verzichten wir hier auf entsprechende Arbeitsblätter.
Auf der *Sichern-Karte 3: Gleichungen mit Variablen lösen* ist an einem Beispiel illustriert, welche Gleichungsumformungen erlaubt sind. Auch hier können Schülerinnen bei Bedarf das Material nutzen. Die Karte kann beispielsweise für eine Zwischensicherung genutzt werden.

Lösungen
Sie finden sie auf der CD im Koffer

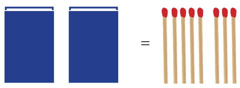
Hinweise:
1. Zur besseren Sichtbarkeit sind alle Streichholzschachteln dunkel und die Streichhölzer mit Kopf gezeichnet, während die Schachteln im Koffer schlicht weiß sind und die Hölzchen aus Sicherheitsgründen keine Anzünd-Köpfe haben.
2. Wir haben in der Überschrift den aus der Schweiz stammenden Begriff „Box" für die Streichholzschachtel gelassen, verwenden aber im Text und auf den Arbeitsblättern den Begriff „Schachtel".
3. Nach: Mathbu.ch 7, Schulverlag und Klett-Balmer Verlag, 2003

Schachteln knacken

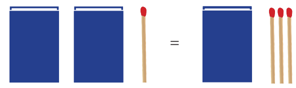
1 Wie viele Hölzer sind in einer Schachtel?

Legt mit Hölzchen und Schachteln die folgenden Situationen. In jeder Schachtel befindet sich die gleiche Anzahl an Hölzchen. Füllt die Schachteln so, dass sich auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleich viele Hölzchen befinden.

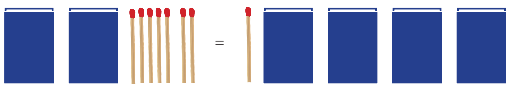
a)



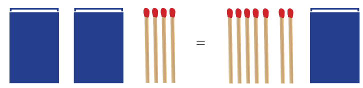
b)



c)



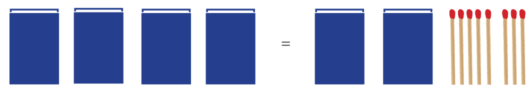
d)



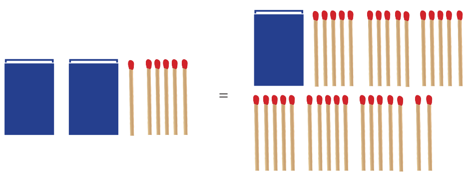
2 Sucht euch von den folgenden Anordnungen mindestens drei aus und findet heraus, wie viele Hölzchen in den Schachteln sind.

a)

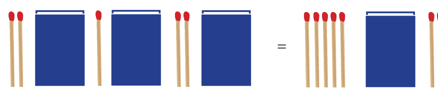
b)



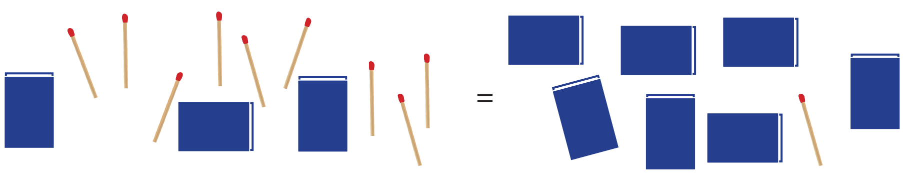
c)



d)

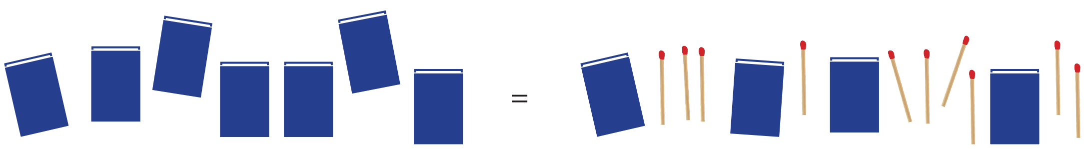


e)



*f)

*g)



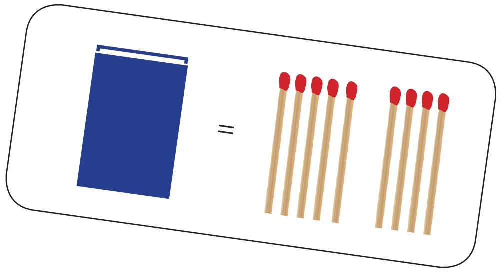
3 Beschreibt, wie ihr auf die Lösung gekommen seid und erklärt euch gegenseitig euer Vorgehen. Was war schwierig, was war leicht?

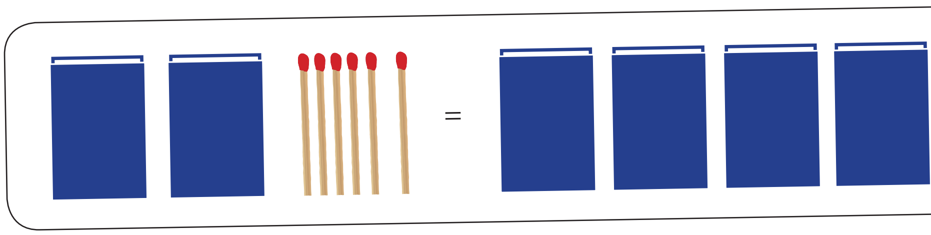
4 Erstellt selber mit den Schachteln zwei weitere Aufgaben. Zeichnet eure Aufgaben ins Heft und lasst sie von der Nachbargruppe lösen.

5 Gibt es Aufgaben, die keine Lösungen haben? Falls ja, gebt Beispiele an und erklärt, warum diese keine Lösung haben. Falls nein, erklärt, warum jede Aufgabe eine Lösung haben muss.

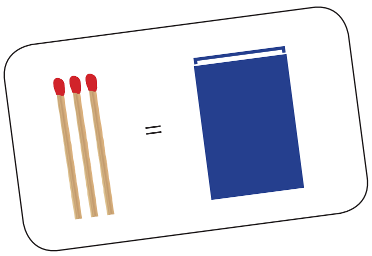
Schachteln knacken durch Umformen

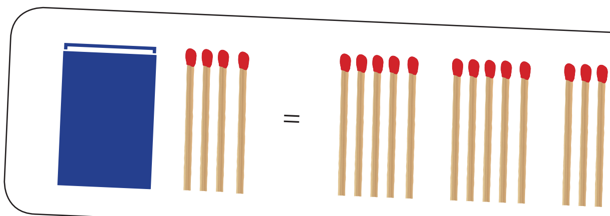
1 Hier sind die Lösungen zu zwei Gleichungen durcheinander geraten. Bringe die beiden Lösungswege in die richtige Reihenfolge.



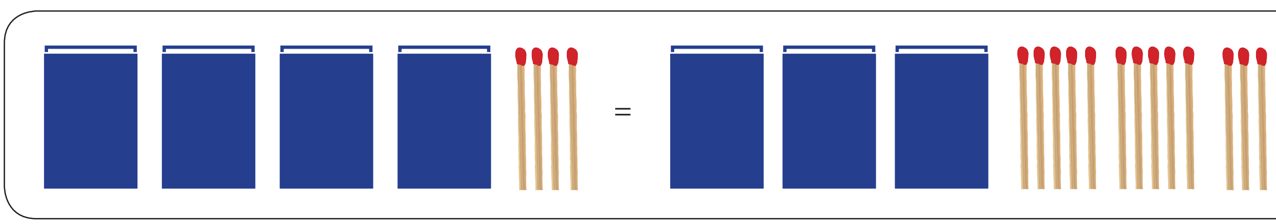


Auf beiden Seiten der Gleichung zwei Schachteln wegnehmen.

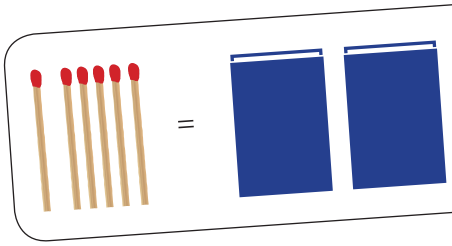




Auf beiden Seiten der Gleichung 4 Hölzchen wegnehmen.



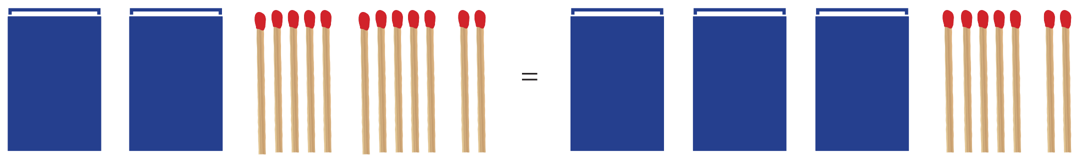
Auf beiden Seiten der Gleichung 3 Schachteln wegnehmen.



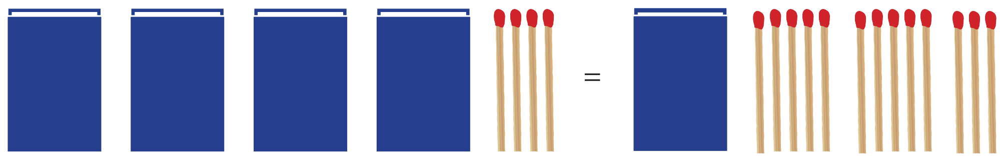
Von beiden Seiten der Gleichung die Hälfte nehmen.

2 Wie viele Hölzchen sind in den Schachteln? Löst mit Hilfe von Umformungen die Schachtelgleichungen. Haltet eure Zwischenschritte im Heft fest.

a)

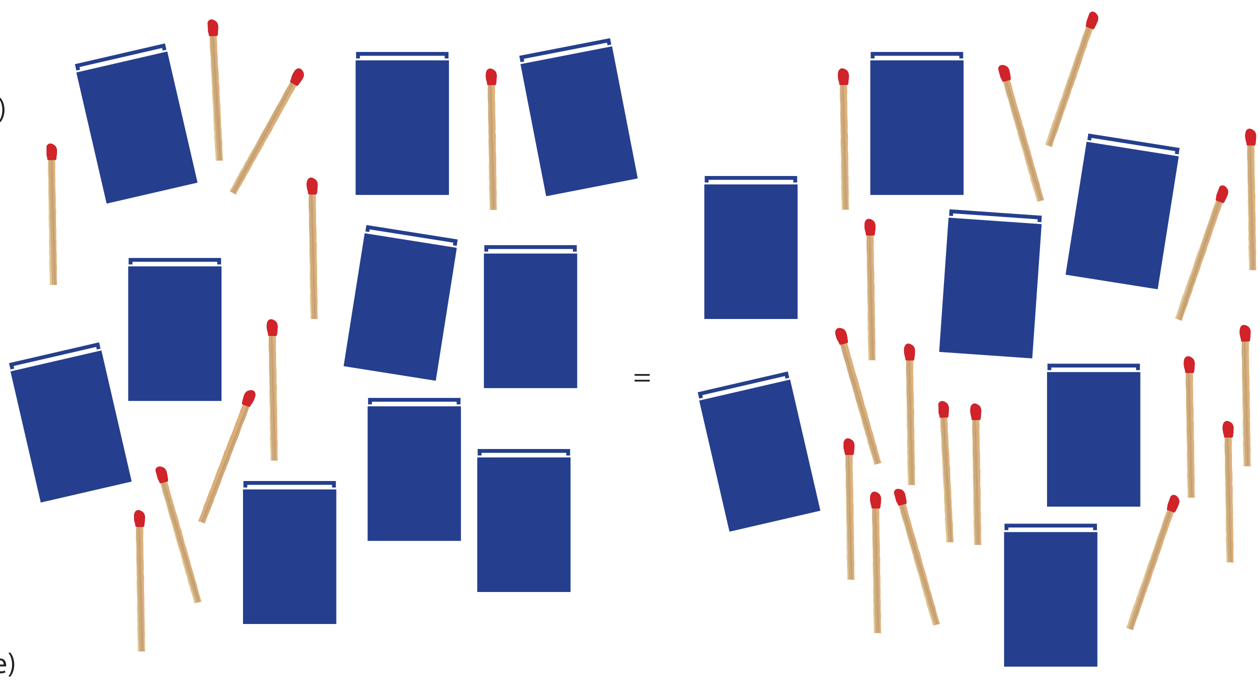


b)

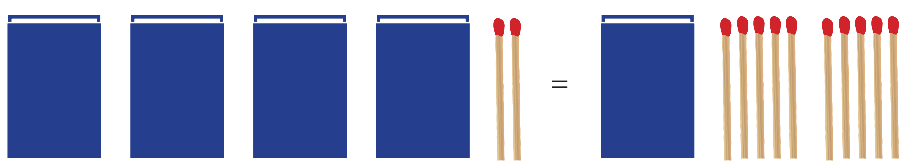


c)

d)



*e)



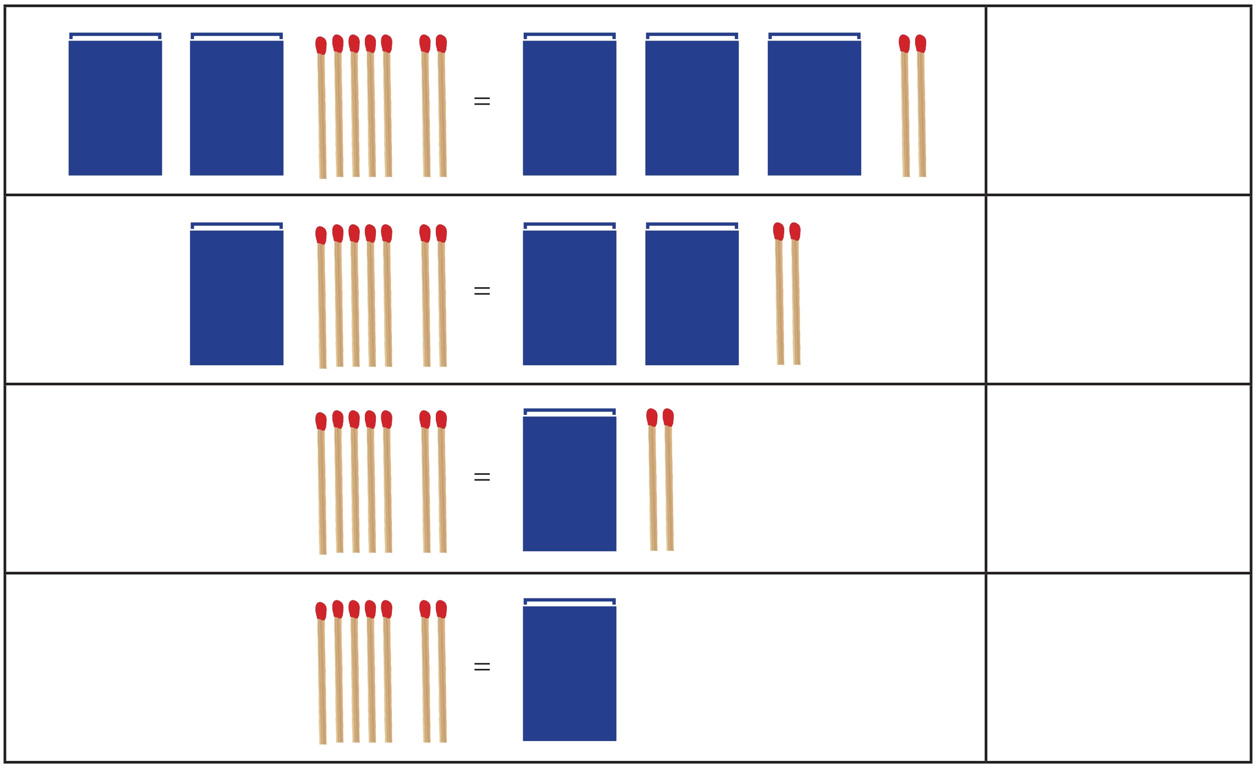
3 Wie kann man überprüfen, ob eine Lösung richtig ist?
Beschreibe dein Vorgehen und führe es an den Gleichungen von Aufgabe 2 durch.

4 Finde den Fehler bei den Umformungen der Schachtelgleichungen.

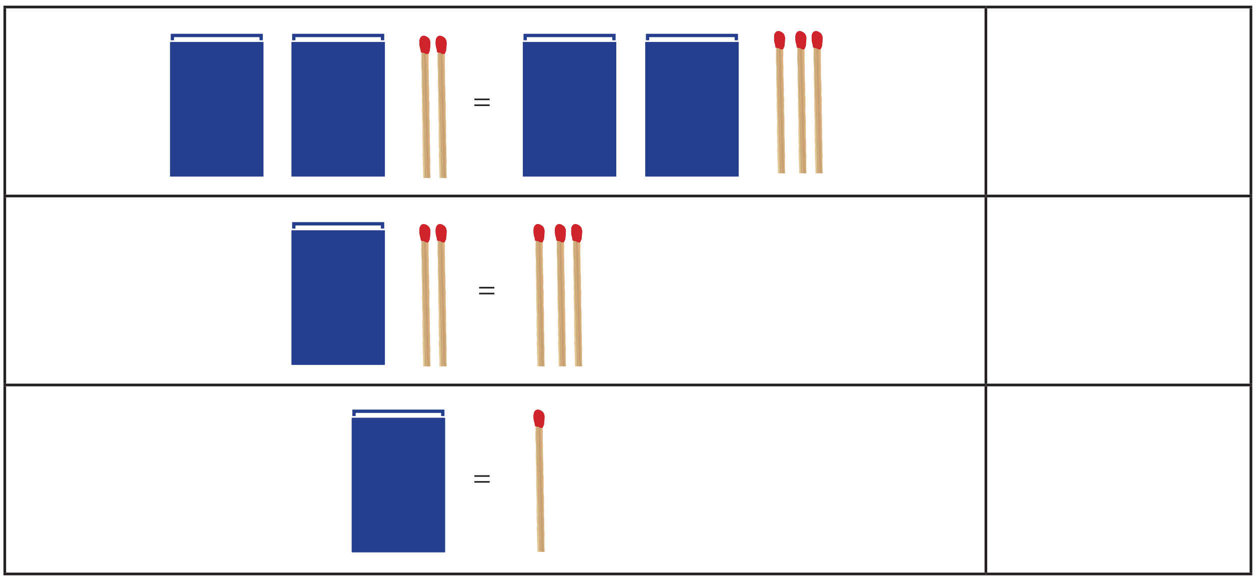
a) Beschreibt rechts neben den Schachtelgleichungen die durchgeführten Umformungen.

b) Beschreibt den Fehler in einem Satz im Heft.

Schachtelgleichung 1:



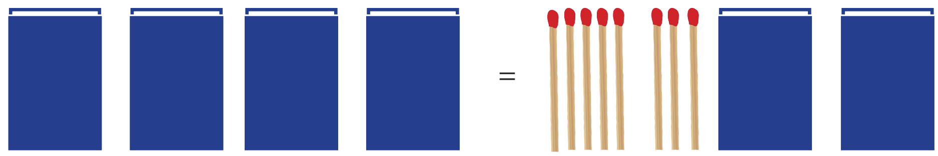
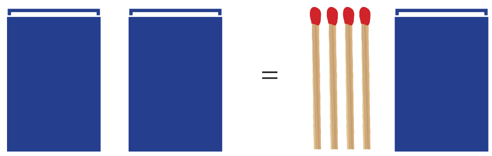
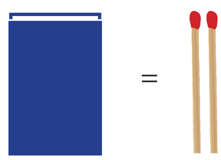
Schachtelgleichung 2:



Schachtelgleichung 3:

Lisa hat sich eine verkürzte Schreibweise ausgedacht. Behalte die Schreibweise für ihre Umformung bei und findet ihren Denkfehler:

Im Folgenden bedeutet S die Anzahl der Hölzchen in einer Schachtel.

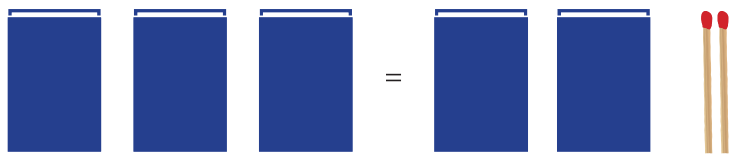
 $4 \cdot S = 8 + 2 \cdot S$	
	
	
	

Schachtelgleichungen

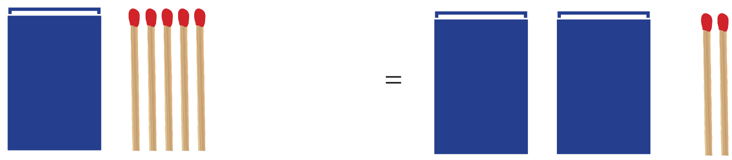
1 Verbindet die Schachtelgleichungen jeweils mit der zugehörigen Gleichung und bestimmt die fehlende Gleichung.

2 Geht noch einmal die bisherigen Arbeitsblätter durch und schreibt zu jeder Schachtelgleichung eine passende Gleichung in euer Heft.

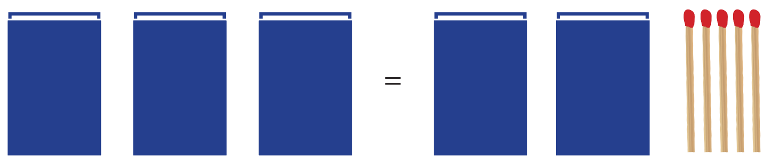
(A)



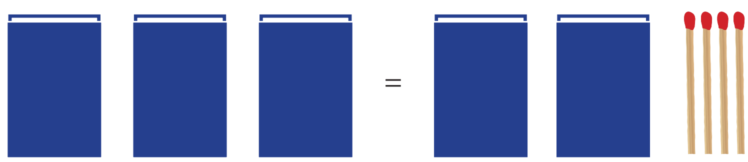
(B)



(c)



(d)



(I) $3 \cdot S = 2 \cdot S + 4$

(II) $3 \cdot S = 2 \cdot S + 2$

(III) $S + 5 = 2 \cdot S + 2$

(IV)

3 Im Folgenden verwenden wir für die Variable die häufig genutzte Bezeichnung „x“.
Zeichnet zu den folgenden Gleichungen die passenden Schachtelgleichung in euer Heft und löst sie. Was fällt euch auf?

a) $2 \cdot x + 7 = 3 \cdot x + 1$

b) $x + 3 + 4 + x = 2 \cdot x + x + 1$

c) $2 \cdot x + x + x = x + 3 + x + 3$

d) $2 \cdot x + 2 \cdot x = 6 + 2 \cdot x$

e) $5 + x + 2 = x + 4 + x + 2 \cdot x$

f) $7 + x = 4 \cdot x + 4$

g) $3 \cdot x + 3 = 2 + x + 4$

h) $x + 5 + 1 = x + 1 + 2 \cdot x + 2$

Zum Weiterdenken

Warum kann man die folgende Gleichung nicht in eine Schachtelanordnung überführen?

$5 \cdot x + 2 = 6 \cdot x - 2$

Termony: Eine Übung zur Äquivalenz von Termen

1 Stunde, plus 1 Stunde Nachbearbeitung

Kompetenzen

- **inhaltlich**: Terme als Beschreibungsmittel für den Flächeninhalt ebener Figuren verwenden, äquivalente Terme durch Aufstellen, Einsetzen und Umformen als solche identifizieren
- **prozessbezogen:** kooperativ verschiedene Arten des Begründens und Überprüfens benutzen, Lösungswege, Argumentationen und Darstellungen vergleichen und bewerten, mathematisches Wissen für Begründungen benutzen

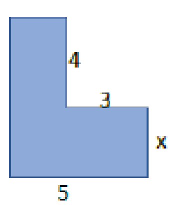
Material

- *Termony* – Spielkarten – pro Spiel 6 Bild- und 12 Termkarten (Material im Koffer)
- 1 Anleitung (S. 109)
- Arbeitsblatt *Flächeninhaltsterme aufstellen* (S. 110)
- Je ein Arbeitsblatt zur Ergebnissicherung (Termony für Varianten 1/2) (S. 111–112)
- Arbeitsplatt *TERMONY-Weiter geht's!* (S. 113) zur Auswertung mit dem Schwerpunkt der algebraischen Termumformung

Möglicher Unterrichtseinsatz/Differenzierung

Diese Übung kann eingesetzt werden, nachdem die Schülerinnen erste Erfahrungen mit Termen gesammelt haben. Sie sollten erfahren haben, dass unterschiedliche Terme dieselbe Situation beschreiben können, Werte in Terme einsetzen können und das Distributivgesetz soweit kennen, dass sie einen Summenterm mit einer Zahl multiplizieren können (siehe Unterrichtseinheiten *x-beliebig*, *Rennstrecken* und *Quadrate und Streifen* in diesem Koffer).
Bei der Übung selbst müssen vorgegebenen Figuren äquivalente Flächeninhaltsterme zugeordnet werden. Dabei können die Schülerinnen unterschiedlich vorgehen: selbst Terme zu den Figuren aufstellen, Terme durch Einsetzen vergleichen oder Terme algebraisch umformen. Gerade diese unterschiedlichen Vorgehensweisen eröffnen fruchtbare Diskussionen während der Spielphase. Erst im Nachgang liegt dann ein Schwerpunkt auf dem expliziten Nachweis der Äquivalenz durch algebraisches Umformen.
Als Voraussetzung muss mit den Lernenden auch geklärt werden, wie Flächeninhaltsterme für einfache ebene Figuren durch Zerlegen in Rechtecke aufgestellt werden.

Ein Beispiel:
Eine mögliche Vorübung ist das Arbeitsblatt *Flächeninhaltsterme aufstellen*.



Mögliche Flächeninhaltsterme:

$$A = x \cdot 5 + 2 \cdot 4$$

$$A = 5 \cdot (x + 4) - 3 \cdot 4$$

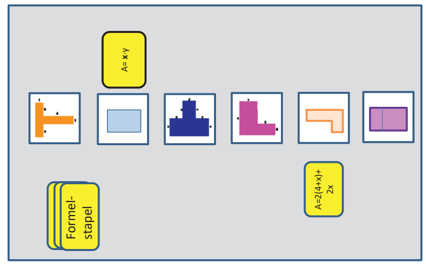
$$A = (x + 4) \cdot 2 + 3 \cdot x$$

Sozialform: Die Übung wird in Vierergruppen durchgeführt. Zwei Varianten sind möglich:

- **S1:** Es wird gegeneinander gespielt und jeder sammelt für sich die Punkte (siehe Anleitung). Ob eine Zuordnung richtig oder falsch ist, handelt die Gruppe unter sich aus. Etwaige Fehlentscheidungen korrigieren sich im Laufe des Spieles weitgehend selbst.
- **S2:** Es wird innerhalb der Gruppe kooperativ gespielt – der Wettbewerb findet zwischen den Vierergruppen statt. Gewonnen hat diejenige Gruppe, die zuerst alle Anlegungen richtig hat.

Ablauf der Übung (siehe auch Anleitung):

Es werden alle 6 Bildkarten (evtl. auch weniger) offen auf den Tisch gelegt. Eine Schülerin zieht eine Termkarte vom versteckten Stapel und versucht diese an die passende Bildkarte anzulegen. Auf dem ausgeteilten Arbeitsblatt *TERMONY* können Hilfslinien eingetragen und der Term dort notiert werden.



Beispiel *eines Spielaufbaus*

Es ist ganz entscheidend, dass die Schülerinnen die Richtigkeit der Anlegungen unter sich selbst aushandeln, weil dies zu ertragreichen kooperativen Diskussionen führt – insbesondere dann, wenn anfänglich zunächst eine Karte falsch angelegt wird und somit später eine Termkarte (es gibt zwei Termkarten pro Bildkarte) partout nicht passen will und alle gemeinsam rückwärts vorgehen müssen (siehe Punkt „Falsch angelegte Karten" der Anleitung). Die Übung endet, wenn alle Termkarten richtig angelegt wurden.

Differenzierung

Das Spiel liegt in mehreren Varianten (0, 1 und 2) vor. Entscheiden Sie selbst, mit welcher Sie anfangen wollen und welche Sie ggf. für besonders interessierte Gruppen oder für eine zweite Übungsphase nutzen wollen.

Die Anforderungen lassen sich verringern, wenn man die Anzahl der Bildkarten verringert und/oder in eher leistungsheterogenen Gruppen spielen lässt.

Die Anforderungen lassen sich erhöhen, wenn man die Schülerinnen auffordert, zusätzliche Terme aufzustellen oder auch eigene Bild- und Termkarten für ein Spiel zu entwerfen, insbesondere dann, wenn auch andere Teilflächen als Rechtecke (z. B. Dreiecke, Trapeze, etc.) zum Zuge kommen. Die Schülerinnen zeigen sich hierbei immer sehr motiviert und einfallsreich.

Hinweis:
Wir danken Nathalie Schwan für die konstruktive und engagierte Mitarbeit bei dieser Einheit!

Egal mit wie vielen Karten man nutzt, wichtig ist nur, dass die zum Einsatz kommenden Bild- und Termkarten zueinander passen. Hier hilft die folgende Tabelle:

Bildkarte	Termkarten	**mögl. zusätzlicher Term (für D2)**	
		Spielvariante 1	***Spielvariante 2***
A	**12, 7**	–	$3 \cdot (2x+1) + 1 \cdot x + 1 \cdot x$
B	**2, 9**	$3 \cdot x + 1 \cdot (2 + x)$	$6 \cdot (6 + x) - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + x^2$
C	**4, 11**	$2 \cdot x + 2 \cdot 2x$	$7 \cdot 6 - 2 \cdot (6 - x) - 3 \cdot (6 - x)$
D	**6, 1**	$4 \cdot (x \cdot 2)$	$4 \cdot (x + y) \cdot 8 + 4 \cdot y + 2 \cdot 4$
E	**8, 3**	$(2x+1) \cdot 5 - 2 \cdot 4x$	$2 \cdot x + 4 \cdot 3 + 2 \cdot x + 4 \cdot (x - 5)$
F	**10, 5**	$2 \cdot x + (4 - x) \cdot 4$	$4 \cdot 4 + (x + 4) \cdot (y - 6) + 2 \cdot (x + 6)$

Sortiert man die Bildkarten alphabetisch von A bis F und die Termkarten in der Reihenfolge 12–7 / 2–9 / 4 –11 / 6 –1 / 8 –3 / 10 –5 (zyklisch 5 abziehen!), so kann man leicht einzelne Figuren aussortieren!

Weiterarbeiten mit den Ergebnissen – Nachweis der Äquivalenz durch algebraisches Umformen
Da jede Schülerin während der Übungsphase die Zuordnungen *Bild→Terme* auf dem Arbeitsblatt notiert hat, kann die Äquivalenz der Terme nun durch algebraische Umformung gezeigt werden. Der Wechsel von der konkret-geometrischen zur abstrakten Situation hilft hierbei Termstrukturen zu erkennen und zu verstehen. Abstrakte Rechengesetze und Umformungsregeln können dabei unter Rückgriff auf die Figuren nochmals entdeckt und begründet werden.
Darum geht's im Arbeitsblatt *TERMONY-Weiter geht's!*. Dafür ist es wichtig die Schülerinnen vorher dazu anzuhalten, die in der Übung zugeordneten oder ggf. selbst entwickelten Terme auf dem Arbeitsblatt zur jeweiligen Variante zu notieren. Damit können sie nun deren Äquivalenz durch Umformen nachweisen.

Lösungen der Arbeitsblätter (es ist jeweils nur der am „stärksten vereinfachte" Term angegeben):

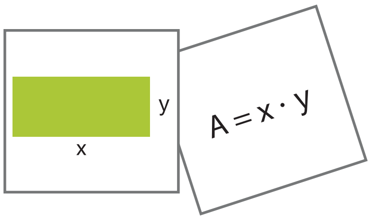
Arbeitsblatt *Flächeninhaltsterme aufstellen*									
Aufgabe	a	b	c	d	e	f	g	h	Zusatz
Lösung	64	$3x$	$60 - 2x$	$7x + 12$	15x	$5x - 6$	$5x + 8$	$5{,}5x$	$½\,xy + 6x$

Arbeitsblatt *TERMONY-Weiter geht's!*				
Aufgabe	1	2	3	Zusatz
Lösung	$7x + 32$	$8x - 10$	$5x + 6$	$9x + 8$

TERMONY	A	B	C	D	E	F
Variante 0	$4x + 8$	$5x + 15$	$2x + 8$	$6x$	$8x$	$3x + 15$
Variante 1	$4x + 8$	$4x + 2$	$6x$	$8x$	$2x + 5$	$16 - 2x$
Variante 2	$8x + 3$	$x^2 + 6x + 24$	$5x + 12$	$4x + 8y + 8$	$8x - 8$	$xy - 4x + 4y + 4$

Anleitung TERMONY

Bei dieser Übung gibt es Bild- und Termkarten. Jede Bildkarte zeigt eine geometrische Figur, jede Termkarte eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes. Zu jeder Bildkarte gehören genau zwei Formelkarten.

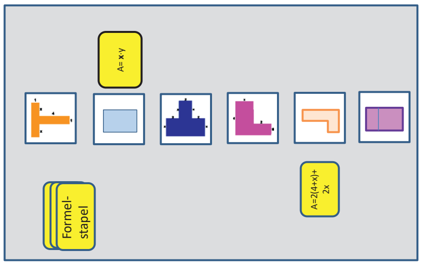


Beginn

- Legt die Bildkarten aufgedeckt und nebeneinander in die Mitte des Tisches.
- Die Formelkarten legt ihr verdeckt auf den Tisch und mischt sie gut durch.

Wie läuft es ab?

Die jüngste Mitspielerin fängt an.



Beispiel *eines Spielaufbaus*

- Decke eine Formelkarte auf.
- Finde zu der Formelkarte die passende Bildkarte. Dazu kannst du, wenn es dir hilft, Hilfslinien auf dem Arbeitsblatt einzeichnen.
- Du darfst dir Hilfe von deinem rechten Nachbarn holen.
- Du kontrollierst gemeinsam mit deiner Gruppe, ob die Formelkarte richtig angelegt wurde. Lass die Bildkarte und die angelegte Formelkarte auf dem Tisch liegen und trage auf dem Arbeitsblatt den Term an der richtigen Stelle ein.
- Lege die Karte wieder verdeckt zu den anderen Formelkarten, wenn du die Formelkarte nicht (richtig) anlegen konntest.
- Notiere deine Punkte auf dem Arbeitsblatt.

Wie wird bewertet?

- Du erhältst zwei Punkte, wenn du die Formelkarte ohne Hilfe richtig anlegst.
- Ihr erhaltet beide einen Punkt, wenn du mit deinem rechten Nachbarn gemeinsam die Karte richtig an gelegt hast.

Falsch angelegte Karten

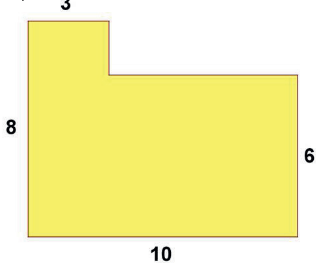
Zu jeder Figur gehören genau zwei Termkarten. Passt im Laufe des Spiels eine der Termkarten sicher nicht an eine der verbliebenen Figurenkarten, so muss vorher ein Fehler passiert sein. Jetzt müsst ihr als Gruppe herausfinden, welche der Karten falsch angelegt wurde. Die falsch angelegten Termkarten wandern dann wieder in den verdeckten Stapel und die entsprechenden Punkte werden natürlich wieder gestrichen.

Ende

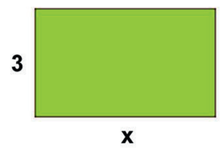
- Sind alle Formelkarten richtig angelegt, so ist das Spiel beendet.
- Die Spielerin mit den meisten Punkten gewinnt.

Flächeninhaltsterme aufstellen

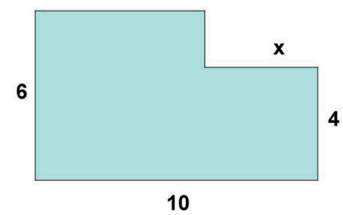
a)



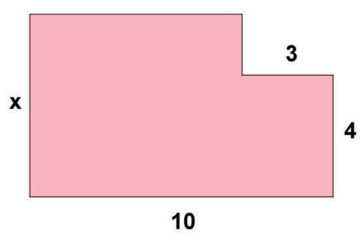
b)



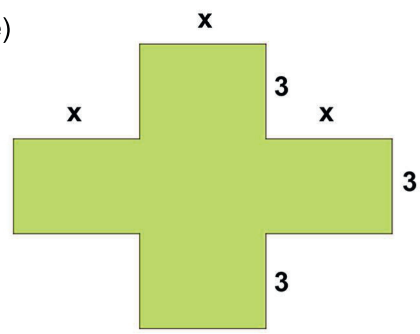
c)



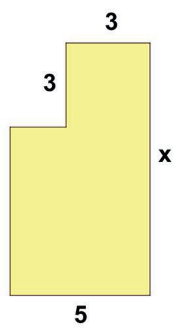
d)



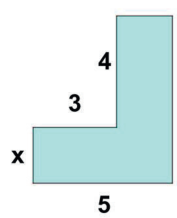
e)



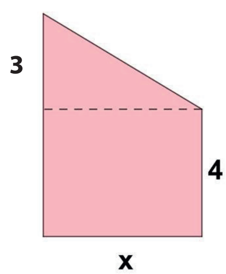
f)



g)



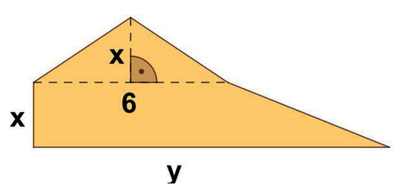
h)



Aufgabe:
Stelle jeweils *mindestens zwei* unterschiedliche Terme für den Flächeninhalt der Figuren (a) – (h) auf (Ausnahme: bei Teil b) geht das nicht).

Tipp: *Wenn du die Flächen unterschiedlich zerlegst, erhältst du auch unterschiedliche Terme!*

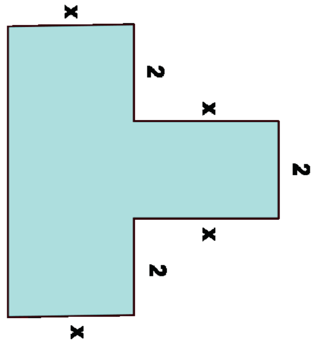
Zum Weiterdenken



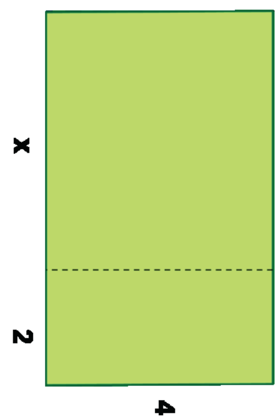
TERMONY für Variante 1

TERMONY Variante 1 - Name: ____________

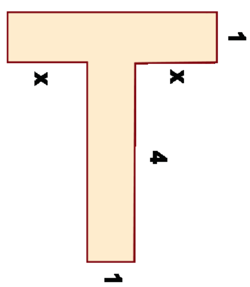
TERME:



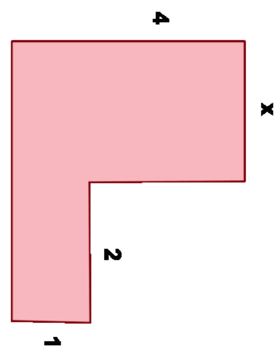
TERME:



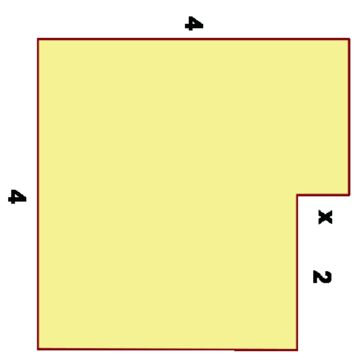
TERME:



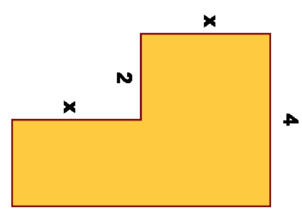
TERME:



TERME:



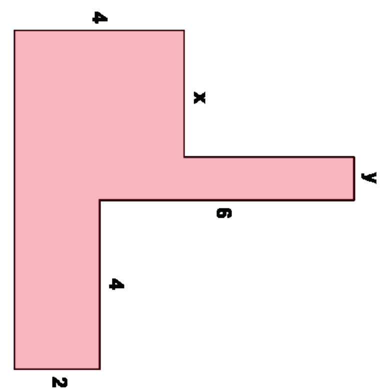
TERME:



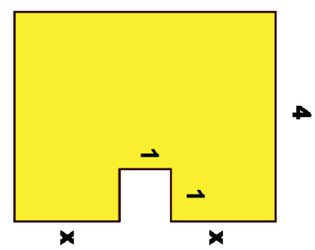
TERMONY für Variante 2

TERMONY Variante 2- Name:

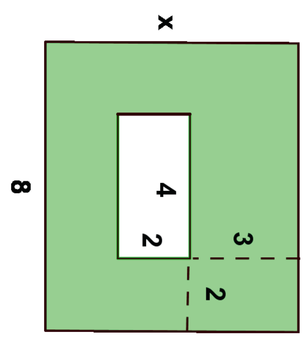
TERME:



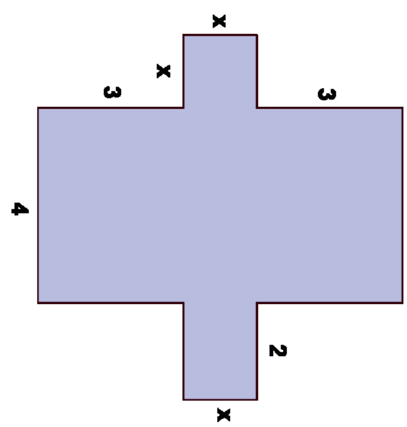
TERME:



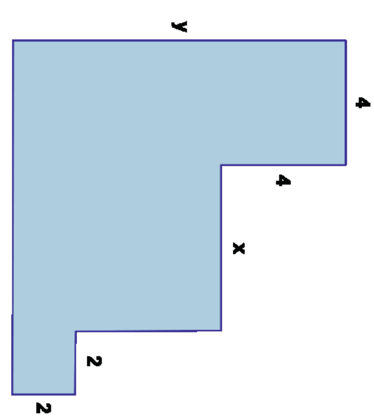
TERME:



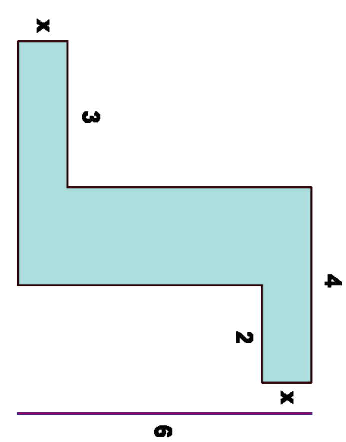
TERME:



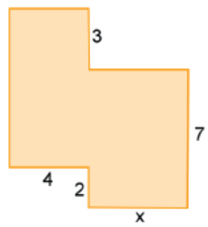
TERME:



TERME:



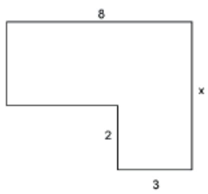
TERMONY – Weiter geht's!



1

a) Versuche möglichst viele unterschiedliche Terme für den Flächeninhalt der Figur links aufzustellen.

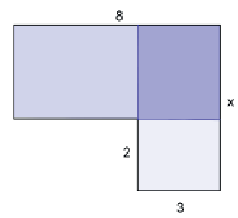
b) Vergleiche deine gefundenen Terme mit deiner Gruppe und ergänze deine Terme mit denen aus der Gruppe.
Gib an, wie viele unterschiedliche Terme ihr gefunden habt.

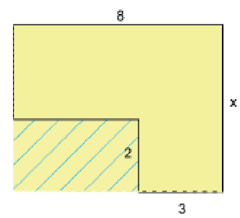


2

Hugo, Ali, Lena und Patty haben für die Figur links folgende Terme für den Flächeninhalt aufgestellt:

Hugo: $5 \cdot (x - 2) + 3 \cdot x$
Ali: $8 \cdot (x - 2) + 2 \cdot 3$
Lena: $x \cdot 8 - 2 \cdot 5$
Patty: $2 \cdot 3 + 3\,(x - 2) + 5\,(x - 2)$





a) Zur Begründung haben zwei der Schülerinnen die rechtsstehenden Skizzen angefertigt. Welche waren das?
Fertige entsprechende Skizzen für die anderen beiden Schülerinnen an.

b) Offensichtlich beschreiben alle Terme richtig den gesuchten Flächeninhalt, obwohl sie so verschieden aussehen. Überprüfe dies, indem du in jeden Term die Werte $x = 3$, $x = 7$ und $x = 9$ einsetzt.

c) Welcher Term ist deiner Meinung nach der einfachste?
Vereinfache möglichst viele Terme durch Rechnen.

3

Paula und Max haben zu einer Bildkarte folgende drei Flächeninhaltsterme aufgestellt – die Bildkarte steht aber leider nicht mehr zur Verfügung:

$(2 + x) \cdot 3 + 2 \cdot x$ $\qquad$ $x \cdot 5 + 2 \cdot 3$ $\qquad$ $5 \cdot (x + 2) - 2 \cdot 2$

Wie kannst du ohne Bilder überprüfen, ob mit den Termen jeweils der gleiche Flächeninhalt berechnet wird? Überprüfe!

4

a) Nimm das Arbeitsblatt „TERMONY" zur Hand, das du während des Spiels ausgefüllt hast. Dort hast du zu jedem Bild mindestens zwei passende Terme aufgeschrieben.
Zeige nur durch Umformen, dass die Terme jeweils gleichwertig sind.

b) Zeige durch Umformen, dass die Terme, die ihr bei **1** aufgestellt habt, alle gleichwertig sind.

Zum Weiterdenken

a) Finde möglichst viele Terme für die rechtsstehende Figur.
b) Setzte 2 verschiedene Werte für x in alle deine Terme ein.
c) Zeige durch Umformen, dass alle deine Terme für diese Figur tatsächlich gleichwertig sind.