



Zentrale Abiturprüfung 2017
Haupttermin
04.05.2017

Weiteres Leistungskursfach
Mathematik

Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung

Aufgabenteil B: Hilfsmittel CAS

Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler

Aufgabenstellung

Aufgabe 2 – Analysis (32 Punkte)

Wearables Ltd. beschäftigt sich mit der Entwicklung und Produktion tragbarer Computersysteme. Unter anderem entwickelt und produziert sie die Datenbrille o-look.



Foto: pixabay.com

Im Folgenden gilt ME für Mengeneinheiten und GE für Geldeinheiten.

- 2.1** Bei der Ermittlung der Kosten für die Datenbrille o-look geht Wearables Ltd. von einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion der Form

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \text{ mit } a, b, c, d, x \in \mathbb{R} \text{ und } a > 0 \text{ aus.}$$

- 2.1.1** Aus der Produktionsabteilung sind folgende Informationen verfügbar:

Die Fixkosten betragen 200 GE.

Das Betriebsminimum wird bei 15 ME erreicht, die Grenzkosten bei dieser Menge betragen 11,5 GE/ME.

Die Wendestelle der Kostenfunktion liegt bei 10 ME.

Bestätigen Sie mittels des Rangkriteriums, dass das entsprechende lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Kostenfunktion mehrdeutig lösbar ist.

(5 Punkte)

- 2.1.2**

Geben Sie den zugehörigen Lösungsvektor in der Form $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ an.

(2 Punkte)

- 2.1.3** Für das Vorliegen einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion muss unter anderem für $a, c > 0$ gelten: $b^2 \leq 3 \cdot a \cdot c$

Gehen Sie davon aus, dass gilt:

$$a = \frac{-23}{450} + \frac{1}{225} \cdot c \text{ und}$$

$$b = -30 \cdot a$$

Ermitteln Sie den Bereich, in dem der Parameter c liegen muss, damit K eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion ist, und geben Sie eine mögliche Kostenfunktion an.

(4 Punkte)



- 2.1.4** Zur Bestimmung einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion dritten Grades sind die Wendestelle x_W und das Betriebsminimum x_{BM} angegeben, wobei $x_{BM} = 1,5 \cdot x_W$ gilt.

Aus diesen Angaben ergeben sich zur Berechnung der Koeffizienten der Kostenfunktion zwei lineare Gleichungen.

Zeigen Sie, dass diese beiden linearen Gleichungen zueinander äquivalent sind.

(5 Punkte)

- 2.2** Wearables Ltd. ist Alleinanbieter der Datenbrille o-look und geht von folgender Preisabsatzfunktion p mit

$$p(x) = 30 \cdot e^{-0,1 \cdot x + 0,1} + 40$$

und der Kostenfunktion K mit

$$K(x) = 0,06 \cdot x^3 - 1,8 \cdot x^2 + 25 \cdot x + 200$$

aus. Dabei gibt x die Stückzahl der Datenbrillen in ME an; $p(x)$ ist der Preis in GE pro ME und $K(x)$ sind die Kosten in GE.

In einer Produktionsperiode können maximal 45 ME hergestellt werden.

- 2.2.1** Berechnen Sie die Gewinnzone und den maximalen Gewinn, den Wearables Ltd. mit dem Verkauf der Datenbrille o-look erzielen kann, sowie den Verkaufspreis, bei dem der maximale Gewinn erreicht wird.

(8 Punkte)

- 2.3** Die Gläser der Datenbrille o-look werden zur Entspiegelung mit einer Spezialflüssigkeit besprüht. Diese befindet sich in einem Behälter, der zum Zeitpunkt $t = 0$ mit 5 Litern Flüssigkeit gefüllt ist. Durch den Verbrauch sinkt die Flüssigkeitsmenge im Behälter und muss daher wieder aufgefüllt werden.

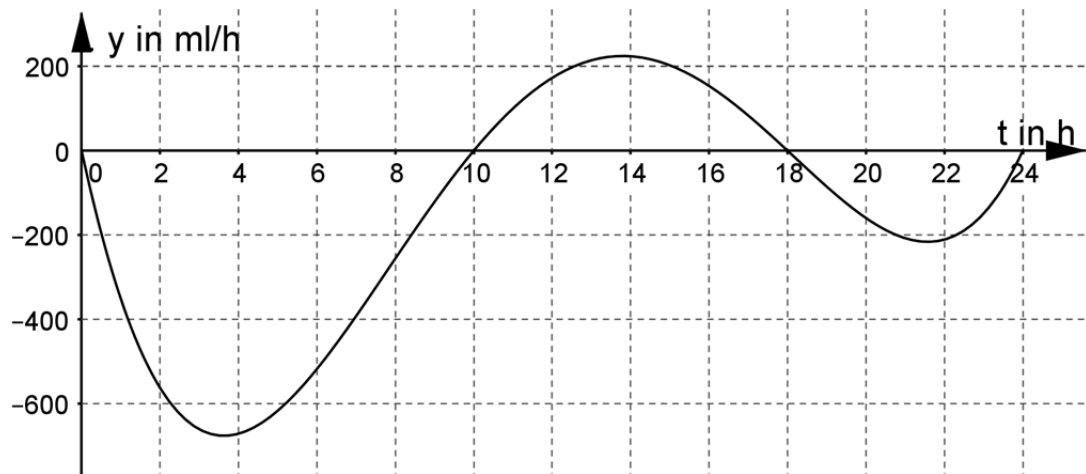
Entnahme und Zuführung der Flüssigkeit geschehen nicht gleichzeitig.

Der Zu- bzw. Abfluss der Flüssigkeit wird modellhaft beschrieben durch die Funktion der Form

$$f(t) = 0,1 \cdot t^4 - 5,2 \cdot t^3 + 85,2 \cdot t^2 - 432 \cdot t \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 24$$

Dabei ist t die Uhrzeit in Stunden und $f(t)$ die Zu- bzw. Ablafrate der Flüssigkeit in Milliliter pro Stunde ($\frac{ml}{h}$).

Im Folgenden ist der Graph von f dargestellt:



Nehmen Sie begründet Stellung zu folgenden Aussagen:

- 2.3.1** Zu den Zeitpunkten 10 Uhr und 18 Uhr wird weder Flüssigkeit aufgetragen noch in den Behälter nachgefüllt. **(2 Punkte)**
- 2.3.2** Innerhalb der ersten 12 Stunden werden 4008,96 ml der Flüssigkeit entnommen. **(2 Punkte)**
- 2.3.3** Zu keiner Zeit innerhalb der 24 Stunden wird die Mindestfüllmenge des Behälters von 800 ml unterschritten. **(2 Punkte)**
- 2.3.4** Für ein Brillenglas werden 4 ml dieser Spezialflüssigkeit benötigt. Von 19 bis 23 Uhr sind insgesamt 181 Brillengläser besprüht worden. **(2 Punkte)**

Aufgabe 3 – Lineare Algebra/Analytische Geometrie (32 Punkte)

Wearables Ltd. produziert an drei verschiedenen Standorten in Werk I, Werk II und Werk III. Für die Produktion der internetfähigen Outdoorjacken werden in Werk I die Sensoren hergestellt, die u. a. die Bewegung der Träger der Jacken analysieren und kommentieren. In Werk II werden die Jacken hergestellt und in Werk III werden die Sensoren in die Jacken eingenäht und versandfertig verpackt.



© fotolia.com

- 3.1** Die Sensoren in Werk I werden in einem zweistufigen Produktionsprozess hergestellt. Zunächst werden aus drei verschiedenen elektronischen Bauteilen B_1, B_2, B_3 vier Zwischenprodukte Z_1 bis Z_4 zusammengestellt. Zur Produktion der drei Sensoren S_1, S_2, S_3 werden sowohl Zwischenprodukte verwendet als auch Bauteile direkt eingebaut.

Die nachstehenden Tabellen zeigen die Mengeneinheiten (ME) der benötigten Bauteile und die zur Weiterverarbeitung erforderlichen ME an Zwischenprodukten.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
B_1	1	6	3	4
B_2	2	3	7	5
B_3	1	2	4	0

	S_1	S_2	S_3
Z_1	2	4	6
Z_2	2	5	3
Z_3	1	3	4
Z_4	0	5	7

Bauteil B_1 wird mit 8 ME direkt in eine ME von Sensor S_1 und mit 4 ME in eine ME von Sensor S_2 eingebaut.

Bauteil B_2 geht mit 5 ME in eine ME von Sensor S_2 ein und von

Bauteil B_3 wird direkt eine ME in eine ME von Sensor S_3 eingebaut.

- 3.1.1** Bestimmen Sie die Matrix D , aus der der Bauteileverbrauch zur Herstellung einer ME der jeweiligen Sensoren S_1, S_2, S_3 entnommen werden kann.

(4 Punkte)



3.1.2

Rechnen Sie im Folgenden mit der Matrix $D = \begin{pmatrix} 25 & 67 & 64 \\ 17 & 74 & 84 \\ 10 & 26 & 29 \end{pmatrix}$,
die den Bauteileverbrauch für die Sensoren angibt.

Die monatliche Auffüllung des Lagers mit Sensoren ist abhängig vom Parameter a mit $0 < a < 1$.

Es sollen $125 \cdot a$ ME von S_1 , $52 \cdot a$ ME von S_2 und $288 \cdot a^2$ ME von S_3 hergestellt werden.

Bei der Auffüllung des Lagers fallen monatlich Fixkosten von 26 500 Geldeinheiten (GE) an.

Die Einkaufspreise sind folgender Tabelle zu entnehmen:

	B_1	B_2	B_3
Einkaufspreise in GE/ME	0,60	0,80	0,70

Ermitteln Sie den Bereich, in dem der Parameter a liegen muss, so dass die gesamten monatlichen Kosten 70 000 GE nicht überschreiten.

(7 Punkte)

3.2

Die innerbetrieblichen Verflechtungen der drei Werke (I – III) werden durch das Leontief-Modell beschrieben.

Im vergangenen Geschäftsjahr wurden folgende Mengen (Angabe in Mengeneinheiten ME) gegenseitig geliefert bzw. produziert:

Werk	I	II	III	Konsum	Produktion
I	4123	1807	3045	$561 \cdot a$	b
II	$310 \cdot a$	0	9620	c	20 170
III	3070	$0,5 \cdot b$	$720 \cdot a$	$\frac{1}{3} \cdot c$	15 560

Die vom Weltmarktpreis abhängigen Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ beeinflussen dabei einige Liefer-, Konsum- und Produktionsmengen.

3.2.1 Berechnen Sie die Werte der Parameter a, b, c und damit die Lieferungen x_{21} , x_{32} , x_{33} , den Konsum bezüglich der drei Werke, die Produktion im Werk I sowie die Technologiematrix.

(8 Punkte)



Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass gilt: $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,96 & 0,42 & 0,84 \\ 0,87 & 1,49 & 1,42 \\ 1 & 0,71 & 2,13 \end{pmatrix}$

- 3.2.2** Im laufenden Geschäftsjahr wird für die Produkte aus Werk II ein Konsum in Höhe von 6750 ME und bezüglich der beiden anderen Werke ein Konsum von jeweils von 3425 ME erwartet.

Berechnen Sie die jeweiligen Produktionsmengen in den drei Werken.

(3 Punkte)

- 3.2.3** Eine andere Prognose geht davon aus, dass zwar Werk II 6750 ME an den Konsum abgibt, aber bezüglich der beiden anderen Werke zusammen ein Konsum von insgesamt 10 000 ME zu erwarten ist.

Bestimmen Sie die Bereiche, in denen die jeweiligen Produktionsmengen der drei Werke liegen müssen, in Abhängigkeit von der Abgabe von Werk I.

(5 Punkte)

- 3.3** Gehen Sie im Folgenden von dieser Technologiematrix aus:

$$A = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,09 & 0,2 \\ 0,13 & 0 & 0,62 \\ 0,26 & 0,29 & 0,23 \end{pmatrix}$$

Im kommenden Geschäftsjahr ist geplant, im Werk I das 18,5-fache der Produktionsmenge von Werk III und in Werk II das k -fache der Produktionsmenge von Werk III herzustellen.

- 3.3.1** Überprüfen Sie für den Konsumvektor, ob es einen wirtschaftlich sinnvollen Bereich für den Parameter k gibt.

(5 Punkte)

Aufgabe 4 – Stochastik (32 Punkte)

Wearables Ltd. produziert auch die in den Datenbrillen verwendeten Akkus. Geringes Gewicht, Tragekomfort und eine praxistaugliche Betriebsdauer sind dabei besonders wichtig.



Foto: pixabay.com

4.1 Die Akkus werden in zwei Produktionsstufen gefertigt.

Erfahrungsgemäß tritt in der ersten Stufe bei 3 % der Akkus ein Fehler auf und ein anderer Fehler in der zweiten Stufe bei 2 % der Akkus. Beide Fehler treten unabhängig voneinander auf.

4.1.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem mit allen Pfad- und Endwahrscheinlichkeiten beschrifteten Baumdiagramm dar und begründen Sie, dass nach dem Durchlaufen beider Stufen mit etwas weniger als 5 % fehlerhaften Akkus zu rechnen ist.

(5 Punkte)

4.2 Jemand behauptet: „Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von fünf Akkus genau zwei mangelhaft sind, ist genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, unter zehn Akkus vier Mangelhafte zu finden. Das gilt unabhängig von der Wahrscheinlichkeit p für einen fehlerhaften Akku.“

4.2.1 Zeigen Sie unter Verwendung der Formel von Bernoulli, dass diese Aussage tatsächlich nur für zwei Werte von p erfüllt ist.

(4 Punkte)

4.3 Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für einen fehlerhaft produzierten Akku bei 4,5 % liegt. Die Akkus werden in Kartons zu 85 Stück abgepackt und zur Weiterverarbeitung versandt. Gehen Sie davon aus, dass die Anzahl der fehlerhaften Akkus binomialverteilt ist.

4.3.1 Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einem Karton keine fehlerhaften Akkus befinden, bei ca. 2 % liegt.

(3 Punkte)



- 4.3.2** Gehen Sie nun davon aus, dass jeder Karton jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % keine fehlerhaften Akkus enthält.

Ermitteln Sie die Anzahl der Kartons, die die Lieferung an die Weiterverarbeitung mindestens umfassen müsste, damit diese mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 99,19 % mindestens zwei Kartons ohne fehlerhafte Akkus enthält.

(4 Punkte)

- 4.4** Je geringer das Gewicht der Akkus ist, umso besser sind diese in der Datenbrille zu verwenden. 10 % der Akkus sind erfahrungsgemäß zu schwer. Daher werden ständig Gewichtskontrollen durchgeführt.

Dieses Kontrollverfahren erkennt Akkus mit zu hohem Gewicht zu 95 %. Allerdings werden im Schnitt 4 % der Akkus, deren Gewicht in Ordnung ist, vom Kontrollverfahren als zu schwer eingestuft.

- 4.4.1** Untersuchen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit aufgrund des Kontrollverfahrens eine falsche Entscheidung getroffen wird.

(5 Punkte)

- 4.5** Wearables Ltd. drängt mit ihren neuen Produkten auf den Markt und wirbt mit dem Slogan: „Surfen, chatten, mailen – der Akku reicht den ganzen Tag“ und garantiert, dass dies im Schnitt von 98 % der Akkus erreicht wird.

- 4.5.1** Die Leiterin der Qualitätskontrolle ist skeptisch und misstraut dieser Garantie. Daher lässt sie 250 Akkus aus der laufenden Produktion auf ihre Leistung hin untersuchen.

Leiten Sie eine Entscheidungsregel her, bei der die Garantie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 1 % verworfen werden kann.

(6 Punkte)

- 4.5.2** Interpretieren Sie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.

(2 Punkte)

- 4.5.3** Im Folgenden ist vom Ablehnungsbereich $\{0; \dots; 238\}$ auszugehen.

Von der Wahrscheinlichkeit p , dass ein Akku der Garantie entspricht, hängt ab, wie wahrscheinlich der Fehler 2. Art ist.

Ermitteln Sie, für welchen Wert von p die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art bei rund 70 % liegt (Ergebnis in Prozent ohne Nachkommastelle).

(3 Punkte)



Materialgrundlage

Bild 1: pixabay.com (google-glass-98440_1280.png)

Bild 2: fotolia.com (#73478566)

Bild 3: fotolia.com (#84955050)

Zugelassene Hilfsmittel

- Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten
- Computeralgebrasystem (CAS)

Arbeitszeit und Punktevergabe

	Arbeitszeit		Punktevergabe			
Teil A	max. 50 Min.	insgesamt 255 Min.	24 Punkte	Inhaltliche Leistung Teil A und B 120 Punkte	Darstellungs- leistung Teil A und B 5 Punkte	Gesamt- punktzahl Teil A und B 125 Punkte
Teil B	mind. 205 Min.		96 Punkte			