

# Rundbrief 185

3/2012

mit Einladung zur MUED-Tagung



## Funktionen haben viele Gesichter



## **Inhaltsverzeichnis**

Funktionen haben viele Gesichter	3
Funktionen falten	8
Knobelteam	12
Klammerkarten und Bandolos	13
Im Koordinatensystem aufstellen	14
Graphen gehen	15
Funktionen überall – schöne und schön fehlerhafte	17
Bauwerke mit GeoGebra vermessen	20
Mathematik aus der Zeitung	22
Komplexe Hausaufgaben in der Sek. II	26

---

## **Impressum**

Der MUED-Rundbrief erscheint vier Mal im Jahr in Appelhülsen mit einer Auflage von 800 Exemplaren.

MUED e.V., Bahnhofstr.72, 48301 Appelhülsen

Tel. 02509 / 606, Fax 02509 / 996516

E-Mail: [mued.ev@mued.de](mailto:mued.ev@mued.de), <http://www.mued.de>

Redaktion dieses Rundbriefs: Ines Petzschler, Heiko Etzold

Redaktion des nächsten Rundbriefs: Sabine Segelken

# Funktionen haben viele Gesichter

Wilfried Herget

Jede und jeder hat einen Bauchnabel. Wer ihn sehen will, muss vielleicht erst einmal ein Kleidungsstück ausziehen und (je nach Bauch ...) in den Spiegel schauen. Jeder übliche Würfel hat sechs Seiten. Wer sie alle sehen will, wird ihn in der Hand drehen oder geschickt einen Spiegel verwenden.

Wer eine mathematische Funktion von allen Seiten betrachten will, wird wohl an dem *Graphen*, an der *Wertetabelle* und an der *Funktionsvorschrift* (wenn es sie denn gibt) interessiert sein – und wenn es ums Modellieren mit Funktionen geht, spielt auch noch die betreffende *Situation* eine Rolle. Die Abb. 1 und 2 veranschaulichen diese vier „Gesichter“ einer Funktion.

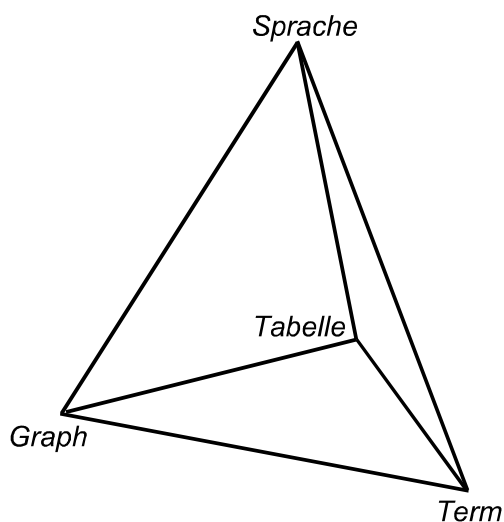


Abbildung 1: Die vier „Gesichter“ einer Funktion – als Ecken eines Tetraeders (Herget/Malitte/Richter 2000a, S. 116)

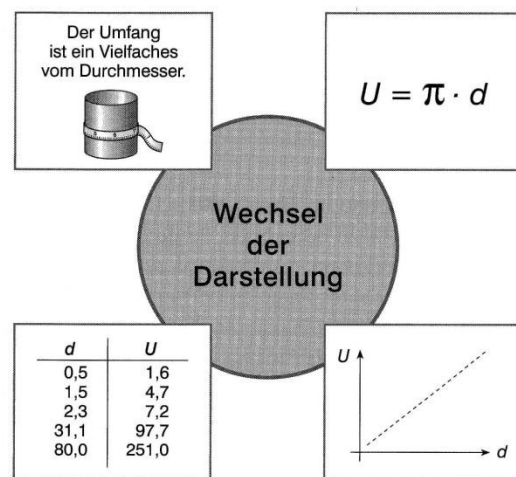


Abbildung 2: Die vier „Gesichter“ einer Funktion – als Mindmap (Barzel/Herget 2006, S. 7)

*Funktionen haben viele Gesichter* – diese Metapher geht auf Herget/Malitte/Richter (2000a) zurück und wird immer wieder gern aufgegriffen (etwa Haas 2012). Durch grafikfähige Taschenrechner und entsprechende Computerprogramme wie *GeoGebra* (siehe [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)) ist es heute möglich, die drei „Mathe-Gesichter“ Graph, Wertetabelle, Funktionsvorschrift mit wenig Aufwand schnell nebeneinander oder nacheinander betrachten zu können. Wesentlich dabei ist, dass jede Schülerin, jeder Schüler selbst zum Beispiel den Funktionsterm abändern kann und so sofort und unmittelbar untersuchen kann, wie sich dadurch Wertetabelle und Graph ändern – und heute ist es auch möglich, ebenso bequem den Graphen geeignet zu verändern und dabei dann die

zugehörigen Änderungen beim Funktionsterm zu studieren. Dieses flexible Hin-und-Her zwischen verschiedenen „Gesichtern“ einer Funktion wird auch als *Shuttle-Prinzip* oder treffender als *Window-Shuttle-Technik* bezeichnet.

Seit Jahrzehnten war der Mathematikunterricht zum Thema Funktionen typischerweise geprägt durch Aufgabenstellungen zum Übergang *Funktionsgleichung* → *Graph*. Dies gipfelt in der uns so vertrauten Kurvendiskussion als feinsinnig zelebriertem Ritual, um zu vorgegebenem Funktionsterm schließlich den Graphen vollständig beschreiben zu können. Tatsächlich aber ist dieser Übergang *Funktionsgleichung* → *Graph* ja nur *einer* von *vielen* denkbaren (und machbaren!) Darstellungswechsel – die folgende Tabelle gibt eine Übersicht dazu (vgl. Herget/von Zelewski).

nach von	Situationen, Bilder, Sprache, Gesten, ...	Tabelle	Graph	Formel, Gleichung
Situationen, Bilder, Sprache, Gesten, ...		Messen	Darstellen	Modellieren
Tabelle	Ablesen, Interpretieren		Wertepaare im Koordinaten- system	mathematische Muster erkennen
Graph	Ablesen, Interpretieren	Ablesen		passende Gleichung finden
Formel, Gleichung	Formel beschreiben, umsetzen	Rechnen	Graphen skizzieren	

In der Tabelle sind mögliche Aufgabentypen, die bei der Behandlung von Funktionen bedeutsam sind, herausgestellt (vgl. auch Swan u. a., Leuders/Prediger, Herget/von Zelewski). Unterschiedliche Darstellungen zu „lesen“ und Funktionen von einer Darstellungsform in eine andere zu übertragen bzw. zu übersetzen hilft sehr, sie zu verstehen und so für eigene Zwecke nutzbar zu machen. Ziel ist, dass die Schülerinnen und Schüler beispielsweise zu einem Funktionstyp eine passende Sachsituation nennen können – und umgekehrt. Dabei hat das Verstehen von Zusammenhängen Vorrang gegenüber dem formalen, mathematisch-symbolischen Umgang mit ihnen: Eine mathematisch-formale *Definition* des Funktionsbegriffs kann gegenüber dem erlebten funktionalen Zusammenhang getrost zurücktreten – auch historisch gesehen ist sie erst spät entstanden (dazu siehe Hischer 2012).

## Drei wesentliche Grundvorstellungen

Als tragende Säulen der mathematischen Idee *Funktionaler Zusammenhang* werden drei wesentliche Grundvorstellungen beschrieben (Vollrath, Malle, Leuders/Prediger, Büchter, Herget/von Zelewski):

- *Zuordnung:*

Welche Größe wird einer anderen eindeutig zugeordnet?

Beispiele: Gewicht  $\leftrightarrow$  Preis; Zeit  $\leftrightarrow$  Füllhöhe, Fußlänge  $\leftrightarrow$  Schuhgröße

- *Ko-Variation:*

Wie verändert sich die eine Größe mit der anderen?

Beispiele: in einer „... je mehr ..., desto ...“-Beziehung diese Abhängigkeit/Dynamik präzisieren: proportional? antiproportional? quadratisch? Exponentiell? ...?

- *Funktion als Ganzes, als Objekt*

Wie verhält sich die Funktion als Ganzes?

Beispiele: das Wesen der Wellen als periodische Ereignisse, die Proportionalität als ein häufig passender Zuordnungstyp, die Parabel als typische Flugbahn.

Diese Grundvorstellungen treten zwar häufig nicht nur einzeln auf, sondern auch mehr oder weniger ausgeprägt gleichzeitig – es hilft aber, sich beim Lehren wie beim Lernen dieser unterschiedlichen Aspekte bewusst zu sein.

## Fragen für die Fachkonferenz

Die folgenden Fragen (vgl. Herget/von Zelewski) gehören daher in die Diskussion zum schulinternen Fachcurriculum, und dank der vielfältigen praxiserprobten Anregungen in diesem Rundbrief sollten sie leicht(er) zu beantworten sein:

- Wie fördern wir die Grundvorstellungen von Funktionen?
- Wie wichtig ist uns das Verstehen von Zusammenhängen gegenüber dem formalen mathematisch-symbolischen Umgang mit Funktionen, und welche Zeit nehmen wir uns dafür?
- Welche Beispiele können wir für die unterschiedlichen Darstellungsformen und den jeweiligen Übergang zwischen ihnen besonders gut nutzen?
- Wann und in welchem Umfang setzen wir dabei grafikfähige Taschenrechner, Tabellenkalkulation und Algebraprogramme ein?
- Welche Fähigkeiten und Fertigkeiten erwarten wir, und wie können wir diese überprüfen?
- ...

## Erklären und Verstehen

Gerade am Beispiel der Funktionen wird auf diese Weise deutlich (vgl. Herget/Malitte/Richter 2000b), welche nützliche, kräftige, ja unverzichtbare Werkzeuge die symbolhafte und die grafische „Sprache“ der Mathematik, aber auch eine sorgfältige (umgangs-)sprachlich-bildliche Darstellung in ihrem Zusammenspiel darstellen. Erst wenn man in der Lage ist, über einen funktionalen Zusammenhang zu *sprechen*, ihn sich und anderen deutlich zu machen, ist auch ein wichtiger Schritt zu dessen Verständnis getan: Man versteht etwas erst dann wirklich, wenn man es anderen erklären kann. Unterrichtsideen und Aufgaben wie die in diesem Rundbrief vorgestellten können zu solch verstehendem und aktivem Umgang mit Funktionen beitragen.

*Was bedeutet es, eine Funktion zu erkennen? Sie in einer Gleichung, einer Tabelle oder einem Graphen zu erkennen? Es bedeutet alles dies, aber darüber hinaus viel mehr. „Viel mehr“ beinhaltet vor allem das Erkennen von Funktionen und funktionalen Zusammenhängen außerhalb der Mathematik.*

Tamás Varga, zit. nach Ambrus/Hortobágyi (2000), S. 125

## Literatur / zum Weiterlesen

Ambrus, András; Hortobágyi, István (2000): Aufgaben zur Festigung des Funktionsbegriffs. – In: Flade, Lothar; Herget, Wilfried (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen nach TIMSS. Anregungen für die Sekundarstufen. – Volk und Wissen, Berlin, S. 125–

Barzel, Bärbel; Herget, Wilfried (2006): Zahlen, Symbole, Variablen – abstrakt und konkret. Plädoyer für einen lebendigen Umgang mit Termen. – In: *mathematik lehren*, Heft 136, S. 4–9.

Büchter, Andreas (2008): Funktionale Zusammenhänge erkunden. – In: *mathematik lehren*, Heft 148, S. 4–10.

Haas, Fabienne (2012): Funktionen haben viele Gesichter – MatheWelt (Schülerarbeitsheft). – In: *mathematik lehren*, Heft 170, S. 24–40.

Herget, Wilfried; Jahnke, Thomas; Kroll, Wolfgang (2001/2009): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. – Cornelsen, Berlin.

Herget, Wilfried; Malitte, Elvira; Richter, Karin (2000a): Funktionen haben viele Gesichter – auch im Unterricht! – In: Flade, Lothar; Herget, Wilfried (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen nach TIMSS. Anregungen für die Sekundarstufen. – Volk und Wissen, Berlin, S. 115–124.

Herget, Wilfried; Malitte, Elvira; Richter, Karin (2000b): Über Funktionen sprechen! – In: *mathematik lehren*, Heft 103, S. 18–21.

Herget, Wilfried; Malitte, Elvira; Richter, Karin; Sommer, Rolf (2003): Das kleine 1x1 des Wachstums – Mathe-Welt (Schülerarbeitsheft). – In: *mathematik lehren*, Heft 120, S. 22–46.

Herget, Wilfried; Strick, Heinz Klaus (2012): Die etwas andere Aufgabe 2 – Mathe mit Pfiff. – Friedrich, Seelze.

Herget, Wilfried; von Zelewski, Dieter (2009): Damit es „funktioniert“ – In: *Mathematik 5–10*, Heft 8, S. 42–43.

Hischer, Horst (2012): Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur - Funktion – Zahl. – Springer, Berlin. ISBN: 978-3-8348-1888-1

Leuders, Timo; Prediger, Susanne (2005): Funktioniert's? Denken in Funktionen. – In: *Praxis der Mathematik in der Schule*, 47 (2), S. 1–7.

Malle, Günther (2000): Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. – In: *mathematik lehren*, Heft 103, S. 8–11.

Swan, Malcolm u. a. (1985): The Language of Functions and Graphs. – Shell Centre & Joint Matriculation Board, Nottingham.

Vollrath, Hans-Joachim (1989): Funktionales Denken. – In: *Journal für Mathematikdidaktik* 10, S. 3–37.

# Funktionen falten

Die Schülerinnen und Schüler falten ein Blatt Papier und bestimmen die Gleichungen für die Figur und die Faltlinien.

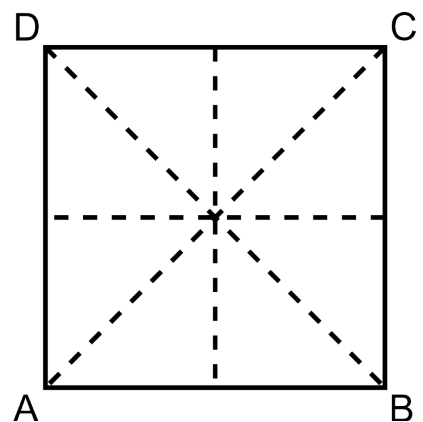
In Abhängigkeit von der Papiergröße, der gegebenen Figur, der Vorgabe oder dem Offenlassen, wo der Koordinatenursprung in der Figur liegen soll, lassen sich die Aufgaben vielfältig verändern und bergen ein großes Potenzial an Wiederholungen und differenziertes Arbeiten.

Die Faltungen können auch mit GeoGebra nachkonstruiert und daran die Schülerlösungen überprüft werden.

## Quadrate und Dreiecke

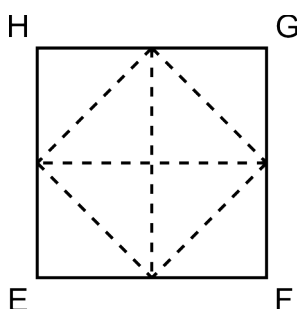
Falte in einem Quadrat ABCD die Mittellinien und Diagonalen.

- Punkt A hat die Koordinaten  $(0|0)$ . Welche Linien stellen keine Funktionen dar?
- Gib die Gleichungen für die Seiten des Quadrats an. (Denke an die Einschränkung des Definitionsbereiches.)
- Bestimme die Gleichungen für die Faltlinien.
- Der Koordinatenursprung liegt nun im Mittelpunkt des Quadrats. Wie ändern sich jetzt die Gleichungen für die Quadratseiten und die Faltlinien? Notiere sie.

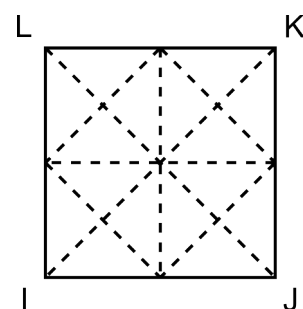


Ähnliche Aufgaben bieten sich auch bei folgenden Faltungen an:

Im Quadrat EFGH werden zuerst die Mittellinien gefaltet. Anschließend werden die Eckpunkte auf den Mittelpunkt des Quadrats gefaltet.



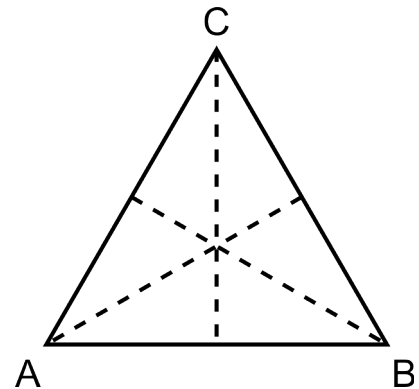
Im Quadrat IJKL werden die Mittellinien und die Diagonalen gefaltet. Danach werden die Eckpunkte zur Mitte hin gefaltet.





Falte in einem gleichseitigen Dreieck ABC die Höhen.

- Punkt A hat die Koordinaten  $(0|0)$ . Welche Linie stellt keine Funktion dar?
- Gib die Gleichungen für die Seiten des Dreiecks an. (Denke an die Einschränkung des Definitionsbereiches.)
- Bestimme die Gleichungen für die Faltlinien.
- Der Koordinatenursprung liegt nun im Mittelpunkt des Dreiecks. Wie ändern sich jetzt die Gleichungen für die Dreiecksseiten und die Faltlinien? Notiere sie.

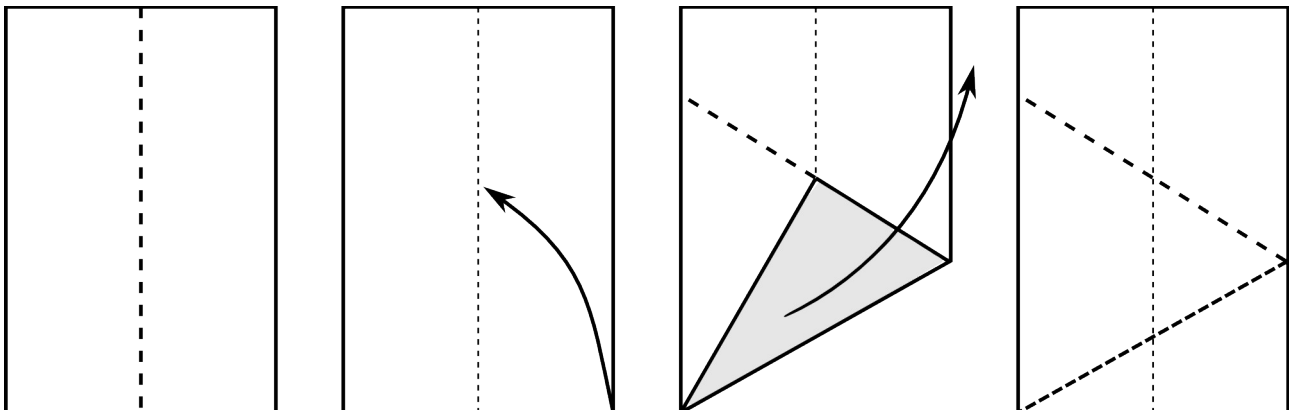


Bei dieser Aufgabe sind folgende Besonderheiten zu beachten:

Der obere Eckpunkte muss zunächst näherungsweise oder analytisch bestimmt werden, wofür trigonometrische Berechnungen notwendig sind.

Zur Bestimmung des Höhenfußpunktes der Höhe  $h_a$  kann man jeweils die Mittelwerte der  $x$ - bzw.  $y$ -Koordinaten der Punkte B und C nutzen.

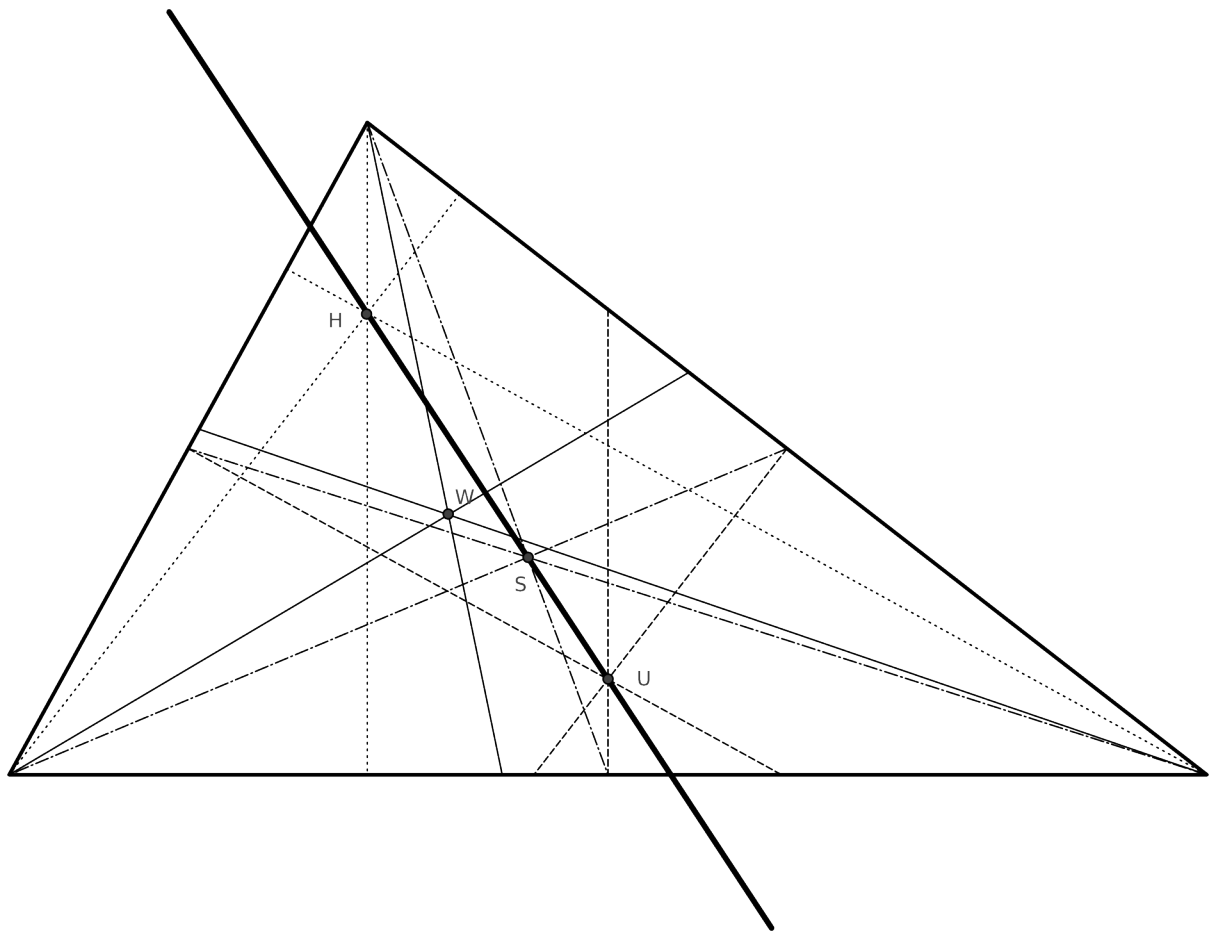
Das gleichseitige Dreieck an sich kann auch gefaltet werden. Dazu faltet man die untere rechte Ecke eine A4-Blattes auf die Mittellinie, wobei die Ecke unten links erhalten bleiben muss. Nun faltet man entlang der Verlängerung derjenigen Kante, die schräg von rechts unten nach links oben verläuft. Es entsteht ein gleichseitiges Dreieck, welches entweder ausgeschnitten wird oder die überstehenden Papierreste werden nach hinten gefaltet.



## Euler-Gerade

Falte aus einem A4-Blatt ein möglichst großes beliebiges Dreieck.

- Falte die Mittelsenkrechten, die Seitenhalbierenden und die Höhen im Dreieck und bestimme die Schnittpunkte (Umkreismittelpunkt U, Schwerpunkt S und Höhenschnittpunkt H). Markiere sie.
- Die Punkte S, U und H liegen auf einer Geraden – der sogenannten Euler-Geraden. Bestimme ihre Gleichung.
- In welchem Verhältnis stehen die Strecken HS und SU?
- Falte die Winkelhalbierenden im Dreieck und prüfe, ob deren Schnittpunkt W auf der Euler-Geraden liegt.

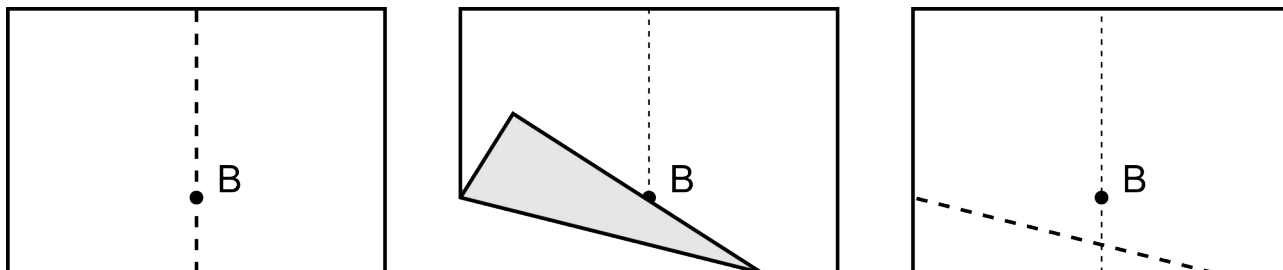


Diese Aufgaben können auch an einem gleichschenkligen Dreieck bearbeitet werden. Im Unterschied zum beliebigen Dreieck liegt dann dann alle vier Schnittpunkte (U, S, H und W) auf der Euler-Geraden.

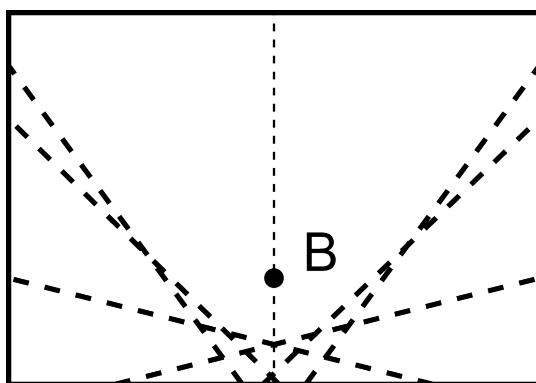
Im gleichseitigen Dreieck fallen U, S, H und W in einem Punkt zusammen und damit existiert keine Euler-Gerade.

### Gerade wird rund

Falte ein A4-Blatt (quer legen) in der Mitte und markiere 4 cm vom unteren Rand einen Punkt B auf der Mittellinie.



- Falte die untere Kante des Papiers so nach oben, dass die Kante auf dem markierten Punkt B liegt. Du erhältst eine Knicklinie.
- Falte das Papier wieder auf und erzeuge eine weitere Knicklinie. Wiederhole den Vorgang mindestens zwanzig mal.
- Zeichne den Rand der entstehenden Figur nach. Welche Figur entdeckst du?
- Wie ändert sich diese Figur, wenn du das Verfahren
  - auf einen Punkt, der 7 cm vom unteren Rand entfernt ist anwendest,
  - auf die kürzere Seite eines A4-Blattes anwendest?



Die Parabel, die hier gefaltet wird, entsteht durch die Knicklinien. Diese stellen die Tangenten an die Parabel dar. Punkt B ist der Brennpunkt, die untere Kante des A4-Blatts ist die Leitlinie. Beim Falten werden Punkte auf der Parabel erzeugt, die vom Brennpunkt B denselben Abstand haben wie von der Leitlinie.

Auch Hyperbeln lassen sich falten. Diese sind aber aufwändiger herzustellen. Mehr dazu ist zu finden in „MatheNetz 9“ von Westermann und „Wie man durch eine Postkarte steigt“ von Beutelspacher, Wagner.

## Knobelteam

---

Beim Knobelteam erhält eine Kleingruppe eine Menge an Informationen, wobei jeder Mitschüler andere Informationen bekommt. Im Team müssen diese nun ausgetauscht und daraus Schlussfolgerungen auf die zu lösende Aufgabe getroffen werden.

Jedes Gruppenmitglied darf seine Informationen nur vorlesen. Die Karten werden nicht ausgetauscht und auch nicht offen ausgelegt. Das fördert die Kommunikation untereinander und veranlasst zum mathematischen Argumentieren. Dies kann durch „unnötige“ Informationen auch noch verstärkt werden.

Weiterhin ist durch diese Herangehensweise sowohl eine formale Lösung (Übersetzung der Information in die Sprache der Mathematik) als auch eine inhaltliche Lösung (durch logisches Nachdenken/Kombinieren) möglich, so dass ein hohes Maß an Differenzierung ermöglicht wird.

### Lineare Gleichungssysteme

Wie hoch ist der Zoo-Eintritt für einen Erwachsenen, wie hoch für ein Kind?

Herr Hecht zahlt insgesamt 127 € für den Zoo-Eintritt.	Peter besucht mit seinen Eltern und seiner Schwester den Zoo.
Frau Müller freut sich auf den Ausflug mit ihrer Familie.	Ab 10 Personen erhält ein Erwachsener 2 € Ermäßigung.
Herr Hecht macht mit seiner 8. Klasse einen Wandertag.	Klara ist eine von 17 Schülern der 8a.
Anne ist die Schwester von Peter.	Frau Voigt geht alleine in den Zoo.
Frau Voigt ist Rentnerin und zahlt daher nur den ermäßigten Eintritt.	Anne Müller zahlt an der Kasse 34 €.

# Klammerkarten und Bandolos

Die Verpackung macht's ...

Ein bestimmtes Grundwissen zu Funktionen muss bei allen Schülern ständig verfügbar sein. „Langweilige“ Aufgaben werden verpackt und variiert und können Abwechslung bieten. Die hier vorgestellten Materialien können für Lernstationen, in Wiederholungsphasen und zum differenzierten Üben verwendet werden.

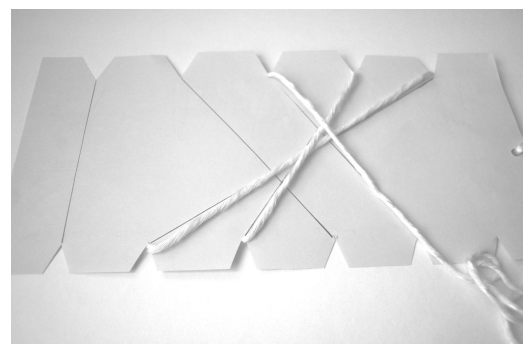
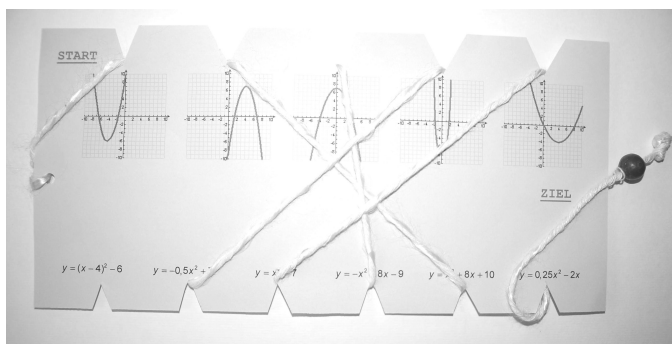
## Klammerkarten

Multiple-Choice-Aufgaben werden formuliert. Den Antwortmöglichkeiten wird eine Farbe zugeordnet. Die „Lösung“ wird mit einer farbigen Büroklammer gekennzeichnet. Durch Umdrehen der Karte und Vergleichen der Klammer-farbe mit dem farbigen Punkt kann die Lösung kontrolliert werden.

LINEARE FUNKTIONEN			
Aufgabe	blau	grün	rot
$x_1 = 2$ ist die Nullstelle der Funktion	$y = 4x + 2$	$y = 2x + 4$	$y = x - 2$
Der Punkt $P(-9; y_s)$ liegt auf dem Graphen der Funktion $y = -9x - 9$ , wenn	$y_s = 72$	$y_s = -90$	$y_s = -9$
Der Graph der Funktion $y = 0,1x$ verläuft	parallel zur x-Achse	durch $P(0 0)$	parallel zur y-Achse
Die Funktion $y = 6x - 3$ besitzt die Nullstelle	$(0, 0,5)$	$0,5$	$(0,5, 0)$
Der Graph der Funktion $y = x + 5$ hat den Anstieg	1	0	5
Durch die Punkte $A(2; 5)$ und $B(-1; -4)$ verläuft die Gerade mit der Gleichung	$y = x + 3$	$y = -x - 3$	$y = 3x - 1$
Der Graph der Funktion $y = 2x - 6$ schneidet die Ordinatennachse im Punkt	$S(3; 0)$	$S(2; -2)$	$S(0; -6)$
Für welches Argument nimmt die Funktion $y = 2x - 6$ den Funktionswert 10 an?	8	14	4

## Bandolos

Auf einer Karteikarte stehen am oberen Rand nebeneinander verschiedene Aufgaben und am unteren Rand die Lösungen (in anderer Reihenfolge und eine mehr als die Aufgabenanzahl). Ein Faden verbindet die erste Aufgabe mit der dazugehörigen Lösung, wird zur zweiten Aufgabe und deren Lösung gezogen, dann zur dritten Aufgabe und deren Lösung usw. Der Faden hinterlässt auf der Rückseite der Karte ein Muster. Ist dieses identisch mit den aufgezeichneten Geraden, ist die Lösung richtig.



## Im Koordinatensystem aufstellen

---

Auf dem Boden wird ein großes Koordinatensystem gezeichnet (Kreide oder Maler-Kreppband). Die Schüler stellen sich auf der x-Achse auf und jeder Schüler behält ab sofort seinen x-Wert bei. Dann werden Funktionsgleichungen vorgegeben, anhand derer sich die Schüler auf ihren entsprechenden y-Wert aufstellen und somit die Klasse den Graphen der Funktion darstellt.

Diese Methode eignet sich einerseits, den Verlauf von Funktionsgraphen zu verinnerlichen. Andererseits wird der Zusammenhang zwischen x- und y-Wert vertieft. Insbesondere wird deutlich, dass der x-Wert ein fest vorgegebener Wert ist (jeder Schüler hat genau einen x-Wert), während der y-Wert sich je nach Funktion ändert.

Gleichzeitig kann herausgearbeitet werden, dass zu jedem x genau ein y gehört, während zu einem y-Wert verschiedene x-Werte existieren können.

Je nach Situation bietet es sich auch an, nur die x-Achse zu skalieren, während die Lage auf der y-Achse nur qualitativ betrachtet wird (vgl. unten stehende Aufgaben zu den Potenzfunktionen).

### Achsenparallele Geraden

Hat ein Schüler einen festen x-Wert, so kann man ihn alle möglich Positionen stellen lassen. Hieran können sehr anschaulich Geraden der Form  $x = c$  erarbeitet werden. Entsprechendes gilt natürlich auch für Geraden der Form  $y = c$ .

### Potenzfunktionen

- Stellt  $y = x$  dar.
- Stellt  $y = x^2$  dar.
- Stellt eine punktsymmetrische Potenzfunktion dar, die nicht  $y = x$  ist.
- Stellt eine Potenzfunktion dar, die durch den Punkt  $(-1|1)$  geht. Welche Gleichung könnte diese Funktion haben? Welche noch? Verallgemeinert.
- Stellt eine Potenzfunktion dar, die einen Tiefpunkt hat. Der Tiefpunkt hüpf bitte kurz hoch.
- Angenommen, ihr würdet  $y = x^2$  darstellen. Stellt jetzt  $y = x^4$  dar.
- Stellt eine Parabel 3. Grades dar. Stellt eine Parabel 1. Grades dar.
- Wer von euch hat theoretisch seinen y-Wert nie verändert? Wer hatte nur die Auswahl zwischen zwei verschiedenen y-Werten? Begründet.

# Graphen gehen

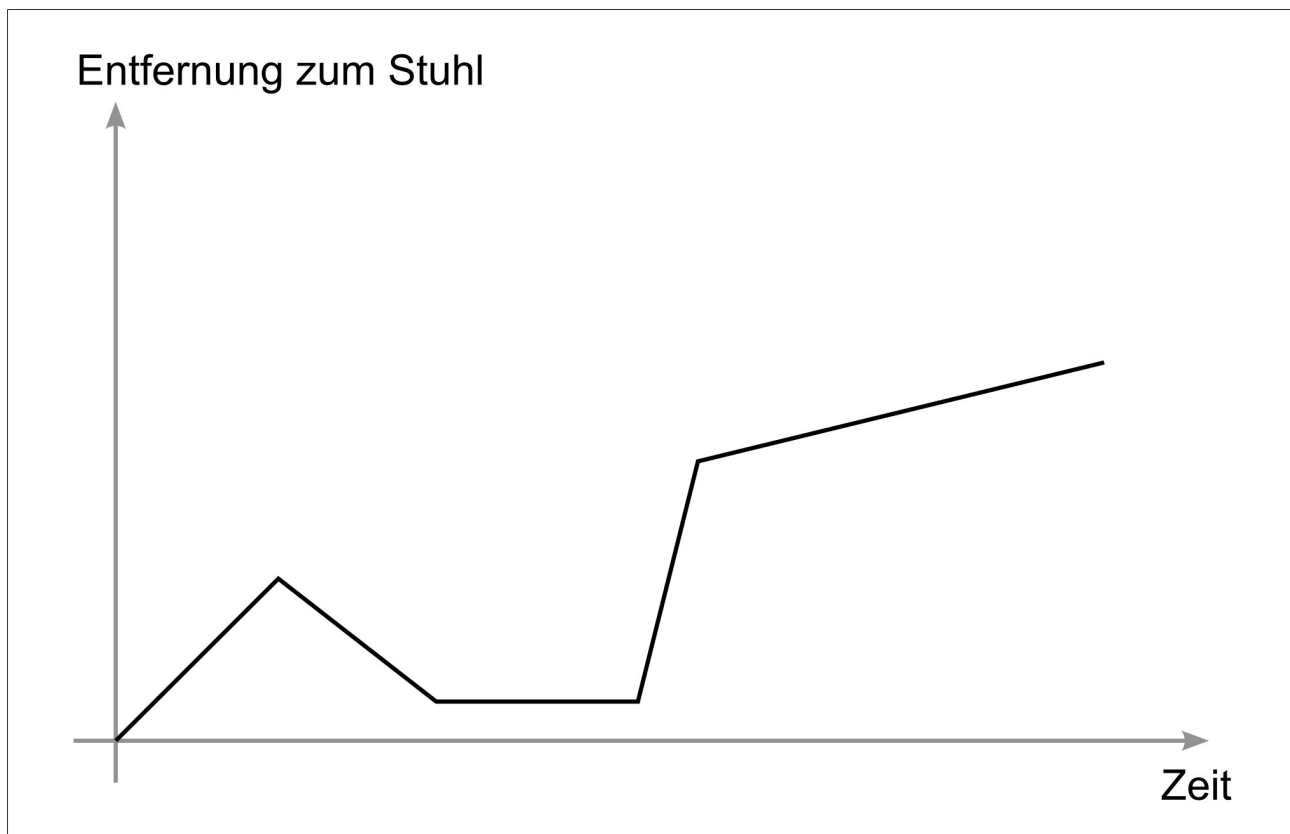
Bei dieser Methode erhalten die Schüler Funktionsgraphen und müssen diese im Raum ablaufen.

Bei der Beschriftung der Achsen sollte die x-Achse mit „Zeit“ und die y-Achse mit „Entfernung zum Stuhl“ oder einen anderen Gegenstand markiert werden. Im Sinne einer besseren Durchführbarkeit sollte auf eine Skalierung der Achsen verzichtet werden – es sei denn, man möchte gerade die Zeiten streng vorgeben.

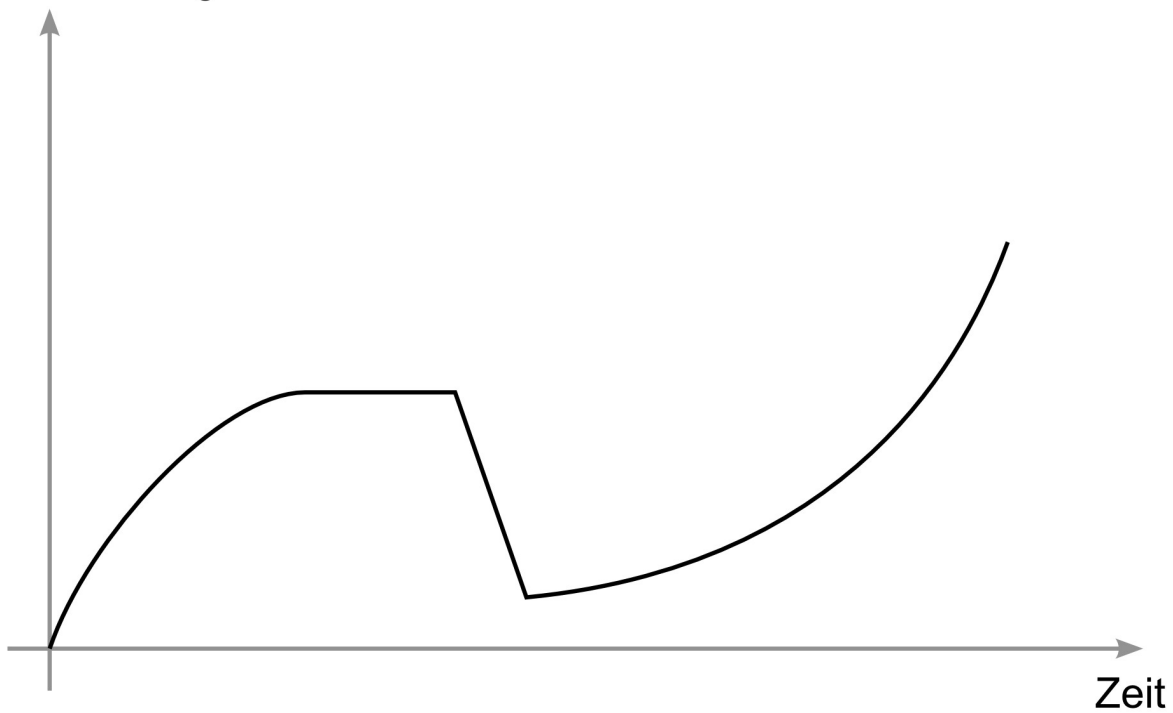
Eine mögliche Durchführungsmethode wäre, das ganze als Theaterstück aufzuführen: Zum Graphen müssen sich die Schüler eine Geschichte erzählen, diese dann darstellen und das Publikum zeichnet anhand der beobachteten Geschichte den Bewegungsgraphen.

## Beispielgraphen

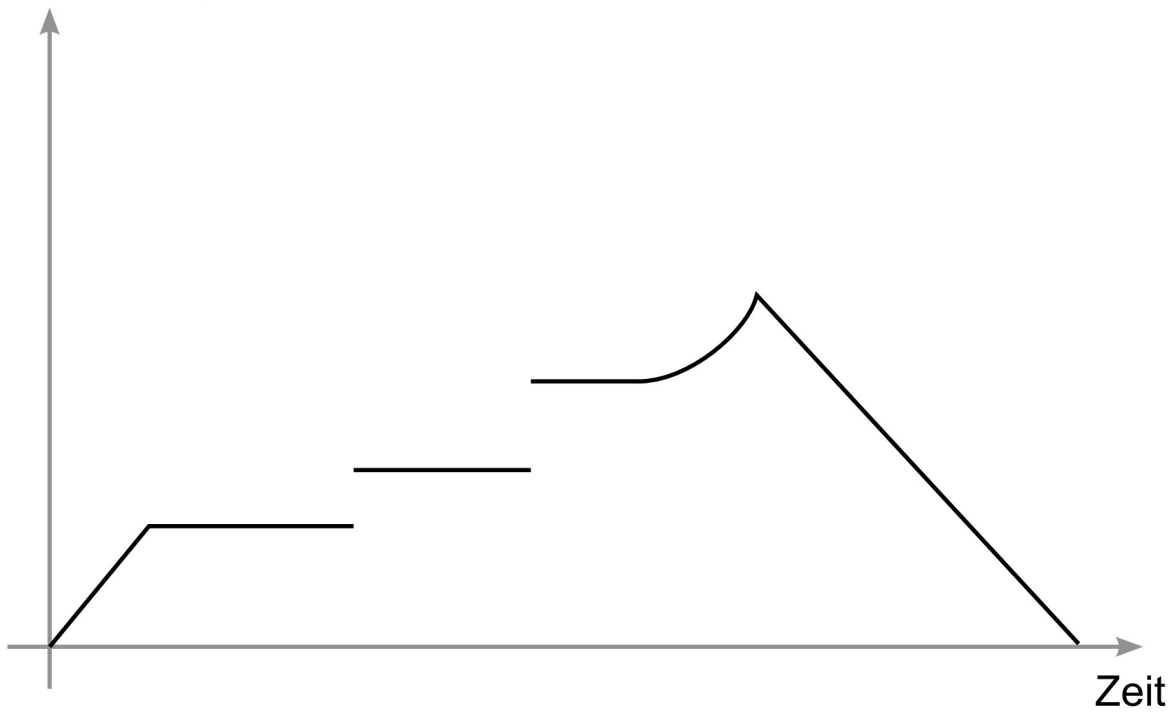
Die vorliegenden Beispiele zeigen neben rein gleichförmigen Bewegungen (1. Karte) auch beschleunigte und abgebremste Bewegungen (2. Karte) bzw. sogar Sprünge (3. Karte), die dargestellt werden müssen.



Entfernung zum Stuhl



Entfernung zum Stuhl





# Funktionen überall – schöne und schön fehlerhafte

Fotos eignen sich besonders zur Motivation von neuen Unterrichtsinhalten. Durch schöne Bilder oder nicht sofort ersichtliche Fehler können die Schüler angeregt werden, sich mit der Mathematik hinter dem Bild zu beschäftigen. Außerdem bieten sie langfristig die Möglichkeit, den „mathematischen Blick“ zu schärfen.

## Fehlerfotos

Auf den folgenden Fotos finden sich mathematische Fehler. Finde sie.



### Die neuen Steuerformeln für 2004

#### Einkommensklasse 7665 bis 12739

$$(793,10 * x + 1600) * x$$

„x“ ist ein Zehntausendstel des 7664 Euro übersteigenden Teils des zu versteuernden Einkommens; bei einem Einkommen von beispielsweise 8664 also  $1000/10000=0,1$

#### Einkommensklasse 12740 bis 52151

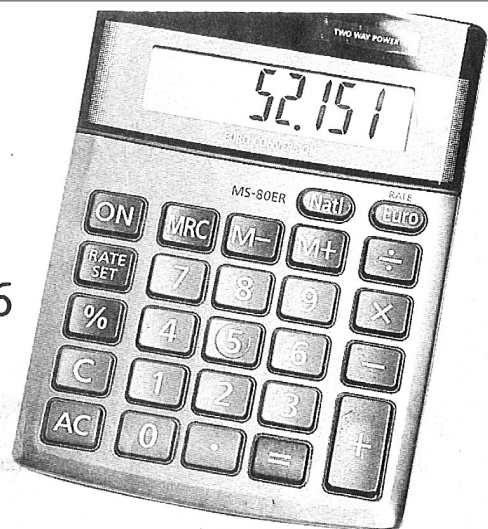
$$(265,78 * y + 2405) * y + 1016$$

„y“ ist ein Zehntausendstel des 12739 Euro übersteigenden Teils des zu versteuernden Einkommens; bei einem Einkommen von beispielsweise 14739 also  $2000/10000=0,2$

#### Einkommensklasse ab 52152

$$0,45 * z - 8845$$

„z“ ist ein Zehntausendstel des 52151 Euro übersteigenden Teils des zu versteuernden Einkommens; bei einem Einkommen von beispielsweise 55151 also  $3000/10000=0,3$

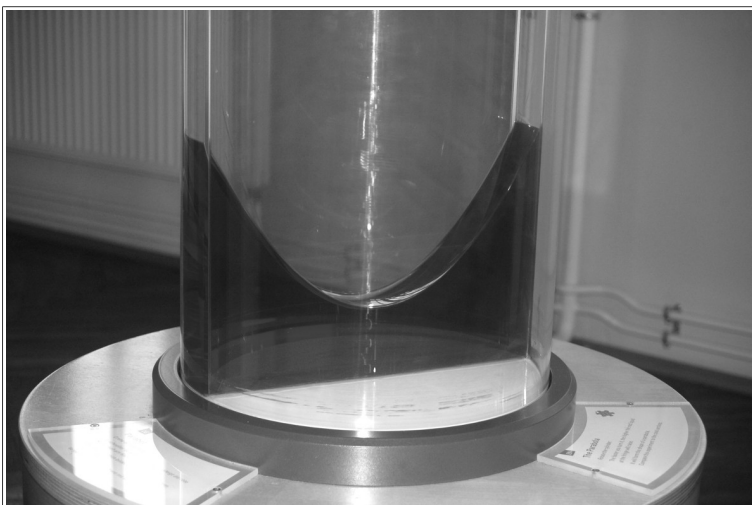
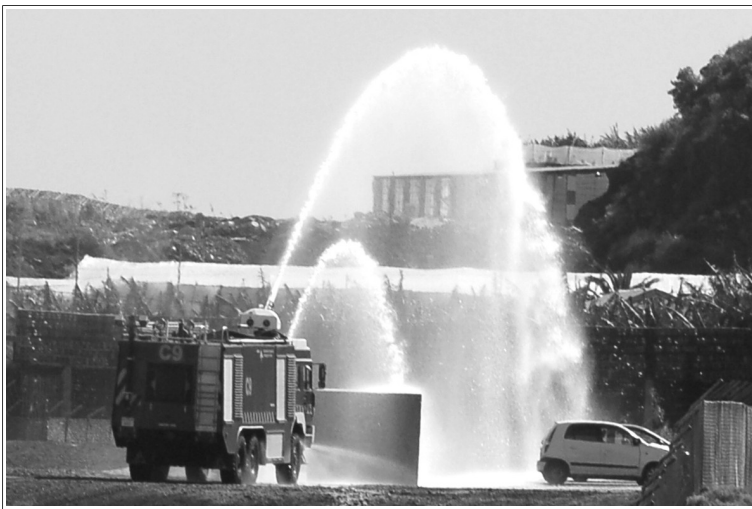


## Kurven überall



## Parabeln





## Bauwerke mit GeoGebra vermessen

Bei diesem Vorgehen werden Bauwerke vermessen und anschließend mit GeoGebra ausgewertet. So können beispielsweise mithilfe von regelbaren Parametern Randkurven der Gebäude ermittelt und diese Daten genutzt werden, um weitere Berechnungen (Länge der Randkurven, Flächeninhalte, ...) durchzuführen.

Die Methode eignet sich insbesondere bei „runden“ Gebäuden, bei denen eine einfache Abmessung und Berechnung nicht mehr möglich ist. Vor allem Brücken weisen oft parabelförmige oder halbkreisförmige Bauweisen auf und sind, wenn sie nicht zu hoch sind, auch noch leicht zu vermessen. Bei größeren Bauwerken kann man zusätzlich Möglichkeiten der Vermessung (zum Beispiel Försterdreieck, Theodolit, ...) integrieren und das Ganze als Projekt durchführen.

### Eisenbahnbrücke

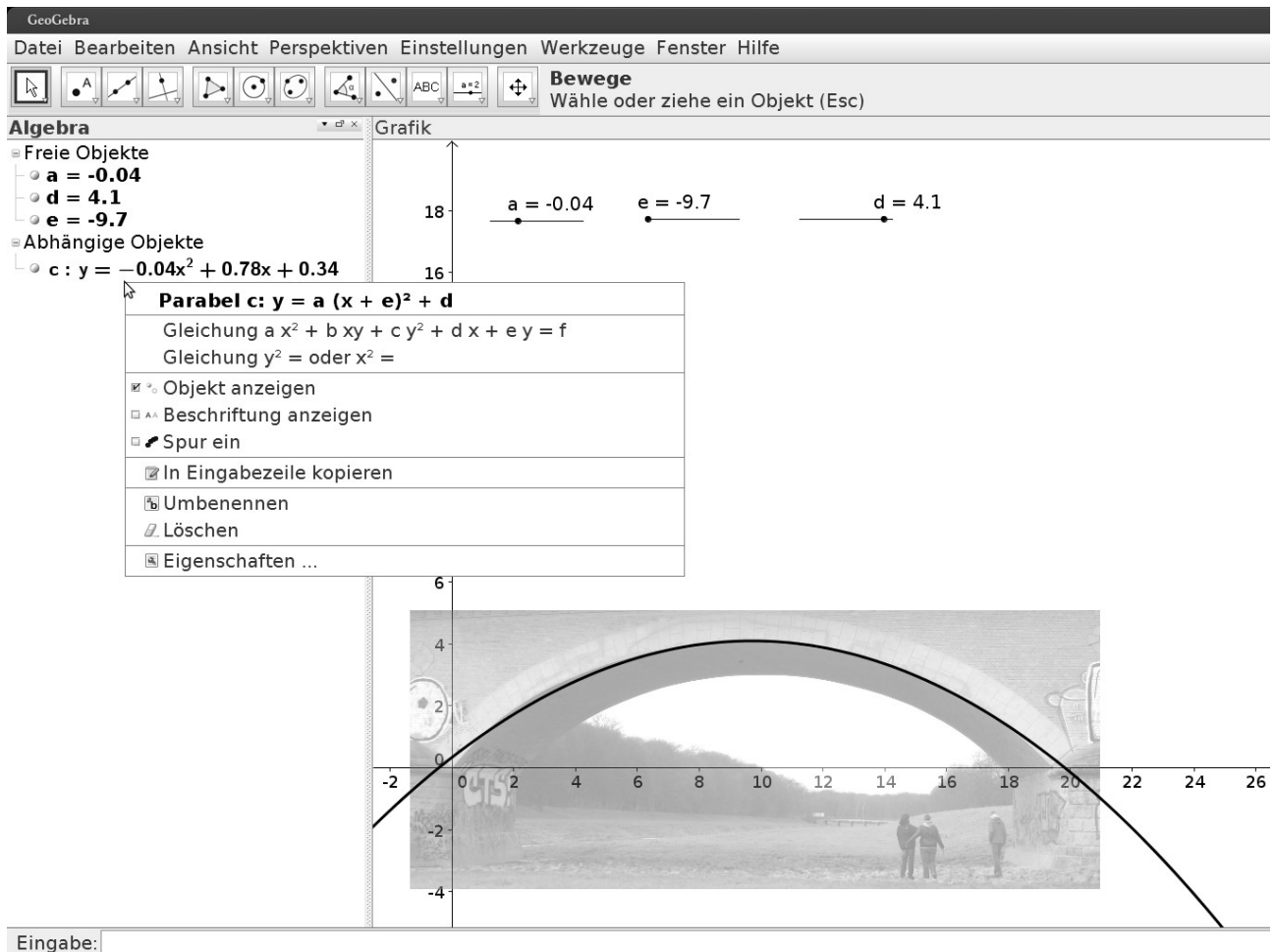
Die Schüler einer 9. Klasse haben die Brücke mit Bandmaß und Messstangen vermessen sowie ein frontales Foto gemacht, um die Auswertung zu vereinfachen.



In GeoGebra wurden drei Schieberegler (a, e und d) eingerichtet sowie die Funktion  $y = a(x + e)^2 + d$  gezeichnet. Weiterhin wurde das Foto integriert und so skaliert, dass die gemessenen Maße mit den Werten auf den Achsen übereinstimmen.

Das Foto wurde mit einer Transparenz von 50% versehen, so dass die Koordinatenachsen noch gut zu erkennen sind.

Nun mussten nur noch die Schieberegler verändert werden, bis die Randkurve auf dem Foto liegt.



Im Vorhinein bietet sich eine qualitative Analyse der Parameter an (welche sind negativ, welche positiv), weiterhin kann eine geeignete Lage des Bildes im Koordinatensystem diskutiert werden, um die Situation zu vereinfachen.

Im konkreten Beispiel ist erkennbar, dass die Parabel nicht genau auf der Randkurve der Brücke liegt. Dies kann einerseits mit einer nicht exakt parabelförmigen Brücke begründet werden. Andererseits ist auch das Foto nicht direkt von vorn geschossen worden, so dass sich eine perspektivische Verzerrung ergibt.

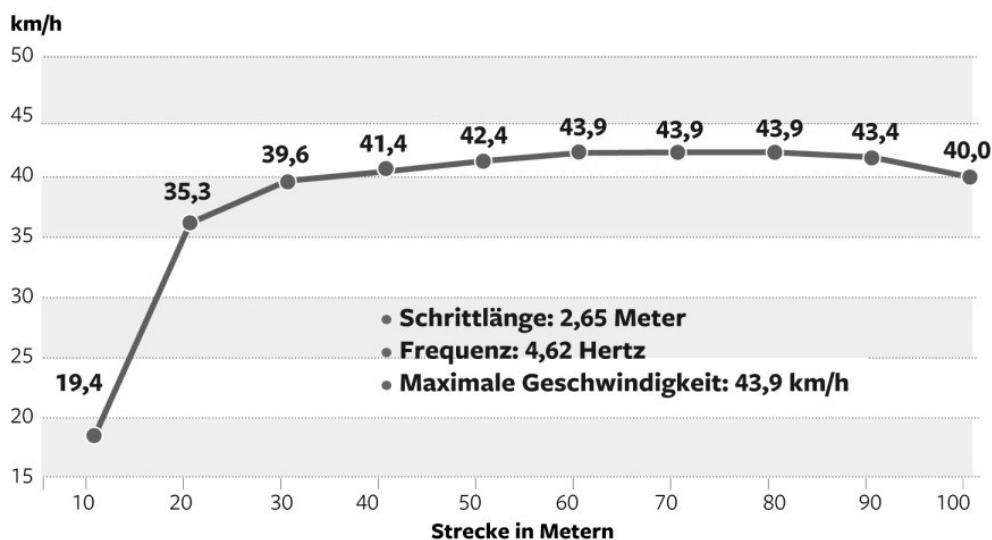
Natürlich kann die Randkurve auch analytisch mithilfe von drei Punkten ermittelt werden, GeoGebra könnte dann zum Überprüfen der Ergebnisse dienen.

# Mathematik aus der Zeitung

Zeitungsartikel und Diagramme auf Richtigkeit zu prüfen, sind im Unterricht eine Möglichkeit, Schüler zu motivieren.

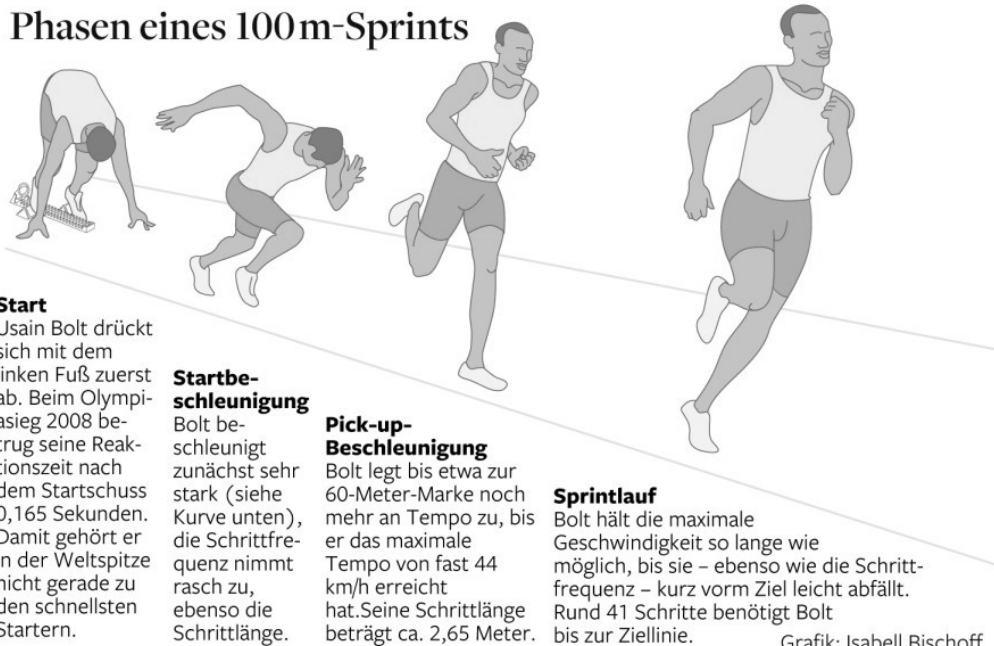
- Überprüfe das Diagramm auf mathematische Richtigkeit.
- Passt der Text zum dargestellten Graph?
- Zeichne den Graphen der Änderung der Geschwindigkeit.

## Geschwindigkeitsverlauf des Weltrekordlaufes in Peking über 100 Meter von Usain Bolt



Grafik: Isabell Bischoff

## Phasen eines 100m-Sprints



Grafik: Isabell Bischoff

Quelle: <http://www.welt.de/sport/olympia/article108486960/Usain-Bolts-Triumph-hinterlaesst-ein-schales-Gefuehl.html>

- Wozu dienen die Parabolspiegel beim Elefantenrüsselfisch?
- Erkläre die Wirkungsweise.

### **Parabolspiegel im Sehorgan**

Uni-Experten blicken afrikanischem Elefantenrüsselfisch tief in die Augen

Glückliche Fügung für Forscher der Leipziger Uni im Kontext der langen Nacht der Wissenschaften: Gestern publizierten sie zusammen mit Wissenschaftlern der Technischen Universität Dresden und Kollegen aus anderen Instituten im Magazin Science eine Studie zum Augenaufbau des

Elefantenrüsselfisches, der im trüben Wasser zentral- und westafrikanischer Seen und Flüsse lebt. Zum ersten Mal konnten sie eine in der Natur vorkommende zehnfache Lichtverstärkung nachweisen. Trick dabei: In der Netzhaut des Fisches sitzen kleine Parabolspiegel, die schwaches einfallendes Licht fokussieren und verstärken,



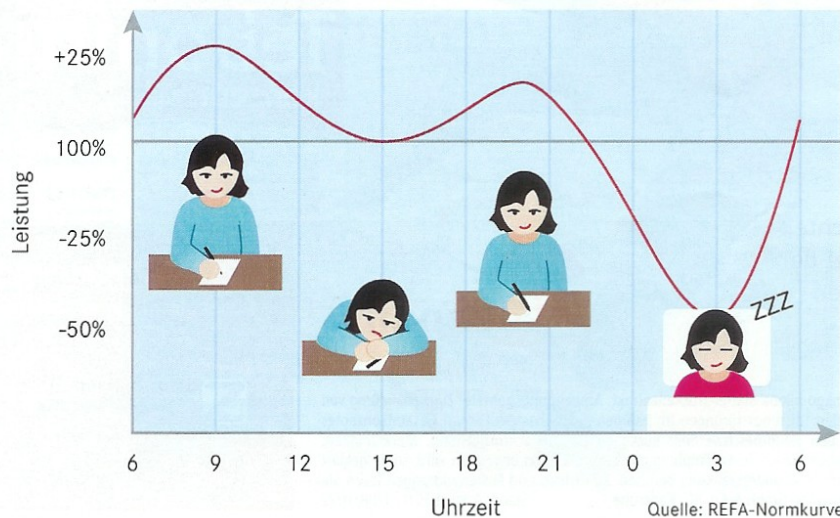
bevor es von den Lichtsinneszellen detektiert wird. Die Erkenntnisse könnten sich beispielsweise für die Mikrochipentwicklung sowie die photonische Kristallforschung auszahlen, schreiben die Fachleute im Science-Journal. Bekannt ist beim Elefantenrüsselfisch bereits sein elektrisches Ortungsorgan in der langen Unterlippe, dessen Aussehen er seinen Namen verdankt. Damit kann er in sehr trübem Wasser den Umkreis von 15 Zentimetern abtasten. Doch er muss dort auch schnell weiter entfernte, große Objekte wie seine Fressfeinde erkennen.

Und dazu dienen ihm jene Argusaugen, deren Funktionsweise nun offenbart wurde. „Der Fisch ist evolutionär sehr gut an seinen Lebensraum angepasst“, sagte Professor Andreas Reichenbach vom Paul-Flechsig-Institut der Alma mater. „Das konnten wir im internationalen Verbund detailliert nachweisen.“ Die Retina des Fisches sei mit Parabolspiegeln regelrecht ausgekleidet, in deren Brennpunkt sich die Zapfen befinden. Reichenbach fasziniert die maximale Ausnutzung der verschiedenen Lichtsinneszelltypen. Selbst bei stark verrauschten Lichtreizen arbeite der Ortungsmechanismus des Fisches zuverlässig.

Quelle: Leipziger Volkszeitung, 30.06.2012



- Prüfe, ob Grafik und Text zusammenpassen. Begründe.
- Wie sieht deine „Leistungsfähigkeitskurve“ aus? Zeichne.



### Fit bei der Arbeit

Die Leistungsfähigkeit schwankt während eines Tages. Mit 100 Prozent wird ein mittlerer Wert angenommen. Vormittags liegen wir deutlich darüber; Schwieriges erledigen wir dann leichter. Das Nachmittagstief tritt gegen 15 Uhr auf.

Quelle: Apotheken-Umschau, 1. Juli 2012

- Welchen Winkel hat die Rampe?
- Welche Geschwindigkeit hat das Motorrad?

### Nur Fliegen ist schöner

So viel Mut hat nicht jeder: 100 Meter unter seinem Motorrad ist erst einmal – nichts. Und selbst einen Sturz in das Wasser des Kanals von Korinth würde Robbie Maddison wahrscheinlich



nicht überleben. Aber der Australier hat sich trotzdem nicht schocken lassen. Mit Hilfe der Rampe links hat er sich und seine Maschine in die Luft katapultiert, um den 85 Meter breiten Graben zu überspringen. Am Ende schaffte er das Wagnis. Nachahmern sei aber gesagt: Der Mann ist Profi und hat ähnliche Sprünge schon oft gemacht. Foto: dpa

Quelle: LVZ 9.04.2012

(näherungsweise Lösung:  $y = -0,0111x^2 + 20$ ,  $\alpha = 43^\circ$ ,  $v = 104 \text{ km/h}$ , real. 125 km/h)



- Betrachte die Grafik. Welche Aussagen kannst du ablesen?
- Stimmen Text und Grafik überein?
- Prüfe die Grafik auf mathematische Richtigkeit.
- Wie viel m<sup>3</sup> Wasser verbrauchen die Leipziger innerhalb von drei Stunden an diesem Abend?

## Nach dem Spiel ist vor dem Spülen

**Der Pfiff ertönt**, es ist Halbzeitpause. Hektisch springen die Zuschauer von ihren Sitzplätzen und laufen Richtung Bad. So oder so ähnlich hat es sich am 9. Juni in den Leipziger Wohnzimmern und auf den Freisitzen oder in den Bars und Restaurants abgespielt, als alle gespannt das erste Gruppenspiel der deutschen Nationalmannschaft zur Fußball-Europameisterschaft gegen Portugal verfolgten. Die Spülanalyse der KWL beweist: Nach dem Spiel ist vor dem Spülen. Denn die Spannung bei sportlichen Großereignissen steht im direkten Bezug zur Betätigung der Toilettenspülung. Vor dem Spiel, während der Halbzeitpause und nach dem Abpfiff steigt der Wassergebrauch rasant an. Kein Wunder – denn keiner möchte das entscheidende Tor verpassen, weil er sich

gerade im Bad befindet. Kein Problem für die KWL: Auch bei Nachfragespitzen – gleich ob bei der EM oder im heißen Sommer – sichert sie jederzeit eine reibungslose und zuverlässige Ver- und Entsorgung. So auch beim Wettlauf zur Toilette in der Halbzeitpause des EM-Spiels: Der Wassergebrauch stieg explosionsartig auf 2.913 Kubikmeter pro Stunde an. Kurz zuvor lag er noch bei 2.362 Kubikmetern.

In Teil zwei wurden die Spülungen noch seltener betätigt als in den ersten 45 Minuten. Den niedrigsten Wert verzeichnete die KWL unmittelbar vor Spielende mit 2.053 Kubikmetern. Mit dem Abpfiff und einem 1:0-Endergebnis für die deutsche Mannschaft konnten dann auch die Zuschauer aufatmen und sich Erleichterung verschaffen.



Darstellung der Wasserabnahme während des ersten EM-Spiels der deutschen Nationalmannschaft 2012.

Quelle: Kundenmagazin der Kommunalen Wasserwerke Leipzig 2/2012

## Komplexe Hausaufgaben in der Sek. II

---

Langfristige Hausaufgaben, als Einzel- oder Partnerarbeit gestellt, bieten die Möglichkeit, dass sich die Schüler weitgehend selbstständig mit einem mathematischen Thema auseinandersetzen und dieses in ansprechender Form dokumentieren.

Der Unterrichtsstoff in der Sek. II eignet sich besonders dazu, jedem Schüler seine Aufgabe zu geben. Der Nachteil ist die sehr aufwändige Kontrolle und Bewertung. Ein vorher überlegtes Bewertungsraster ist hilfreich und ermöglicht den Schülern am Ende Transparenz ihrer Bewertung.

Zu den Themen Funktionsgraphen und Flächenberechnungen mithilfe der Integralrechnung zum Beispiel können verschiedene gekrümmte Flächen vorgegeben werden (Logo McDonald's oder Nike, Herzen, ovale Geschenkverpackungen usw.). Der Umriss der Figur wird mithilfe von Funktionsgraphen mit GTR oder einem DGS dargestellt, die Überlegungen sowie nötigen Berechnungen werden schriftlich (mit dem Computer) notiert.

Bei der Berechnung von Rotationsvolumina können die Schüler selbst geeignete Gefäße aussuchen, darstellen und berechnen. Biergläser (nicht das Kölschglas!), besondere Weinflaschen, Blumenvasen finden sich zu Genüge.

### Rund ums Ei

Benötigt werden: gekochtes Ei, Eierschneider, Lineal, Millimeterpapier, Messzylinder, Gefäß

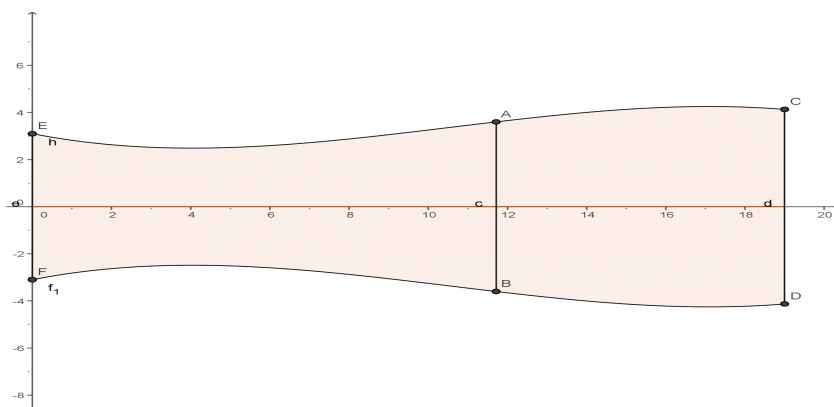
- Gehen Sie auf die Internetseite: <http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/projekt/mathei/>, Stichwort: Einalysis  
Lesen Sie und versuchen Sie die Informationen zu verstehen.
- Bestimmen Sie das Volumen des Hühnereis durch
  - Wasserverdrängung
  - Bestimmung des Rotationsvolumens
  - Zerlegung in einzelne Scheiben.Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse und machen Sie eine Fehlerabschätzung.
- Stellen Sie die „Randkurve“ des Eis mit GeoGebra dar.
- Bestimmen Sie die Oberfläche des Hühnereis durch
  - Berechnen
  - Zusammenlegen der Schalenteile.Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse und machen Sie eine Fehlerabschätzung.



### Bierglas und Bierschaumzerfall

Benötigt werden: Maßband, Bierglas, Bier, Messbecher, Wasser, Lineal, Folienstift, GTR und GeoGebra, Uhr mit Sekundenzeiger

- Wählen Sie ein Bierglas aus und fotografieren Sie es (Größenverhältnisse müssen erkennbar sein).
- Stellen Sie die „Randkurve“ des Bierglases mit GeoGebra dar (und fügen Sie das Foto als Hintergrund ein).
- Untersuchen Sie die Abnahme der Schaumhöhe des Bieres in Abhängigkeit von der Zeit.
- Notieren Sie die Werte in geeigneten zeitlichen Abständen in einer Messwerttabelle und ermitteln Sie die Funktionsvorschrift der Abnahme. Geben Sie diese als Exponentialfunktion mit der Basis  $e$  an.
- Stellen Sie die ermittelte Funktion mit GeoGebra dar.
- Bestimmen Sie das Fassungsvermögen des Bierglases
  - mithilfe eines Experiments
  - durch Berechnung des Rotationsvolumens.
- Vergleichen Sie die Ergebnisse und führen Sie eine Fehlerabschätzung durch.
- Ermitteln Sie rechnerisch und experimentell die Füllhöhen, wenn 0,3 l bzw. 0,5 l Flüssigkeit eingegossen werden.
- Wie hoch muss das Glas gefüllt werden, damit es genau halb voll (halb leer) ist? Zeichnen Sie auch die berechneten Füllhöhen zu 0,3l und 0,5l ein.
- Untersuchen Sie die Abhängigkeit der Bierschaumhöhe von der Gefäßform. Wählen Sie mindestens zwei verschiedenen Glasformen.



## Die letzte Seite ...

Theodor Storm: Von Katzen

Vergangnen Maitag brachte meine Katze / Zur Welt sechs allerliebste kleine Kätzchen, / Maikätzchen, alle weiß mit schwarzen Schwänzchen. / Fürwahr, es war ein zierlich Wochenbettchen! / Die Köchin aber, Köchinnen sind grausam, / Und Menschlichkeit wächst nicht in einer Küche - / Die wollte von den sechsen fünf ertränken, / Fünf weiße, schwarzgeschwänzte Maienkätzchen / Ermorden wollte dies verruchte Weib. / Ich half ihr heim! - Der Himmel segne / Mir meine Menschlichkeit! Die lieben Kätzchen, / Sie wuchsen auf und schritten binnen kurzem / Erhobnen Schwanzes über Hof und Herd; / Ja, wie die Köchin auch ingrimmig drein sah, / Sie wuchsen auf, und nachts vor ihrem Fenster / Probierten sie die allerliebsten Stimmchen. / Ich aber, wie ich sie so wachsen sahe, / ich preis mich selbst und meine Menschlichkeit. - / Ein Jahr ist um, und Katzen sind die Kätzchen, / Und Maitag ist's! - Wie soll ich es beschreiben, / Das Schauspiel, das sich jetzt vor mir entfaltet! / Mein ganzes Haus, vom Keller bis zum Giebel, / Ein jeder Winkel ist ein Wochenbettchen! / Hier liegt das eine, dort das andre Kätzchen, / In Schränken, Körben, unter Tisch und Treppen, / Die Alte gar - nein, es ist unaussprechlich, / Liegt in der Köchin jungfräulichem Bette! / Und jede, von den sieben Katzen / Hat sieben, denkt euch! sieben junge Kätzchen, / Maikätzchen, alle weiß mit schwarzem Schwänzchen! / Die Köchin rast, ich kann der blinden Wut / Nicht Schranken setzen dieses Frauenzimmers; / Ersäufen will sie alle neunundvierzig! / Mir selber, ach, mir läuft der Kopf davon - / O Menschlichkeit, wie soll ich dich bewahren! / Was fang ich an mit sechsundfünfzig Katzen! -