Schätzen von Wahrscheinlichkeiten II

|  |
| --- |
| **Gesetz der großen Zahl**  Die relative Häufigkeit, mit der ein bestimmtes Ergebnis eines Zufallsversuchs beobachtet wird, schwankt mit zunehmender Anzahl der Versuche immer weniger. Die Zahl, bei sich die relativen Häufigkeiten stabilisieren, nennt man die **(statistische) Wahrscheinlichkeit** des Ergebnisses.  Wenn man einen Versuch häufig ausführt, erhält man durch die relative Häufigkeit einen geeigneten Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit. |

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Bei 5000 Würfen erscheint die Augenzahl 1 bei Würfel 1) 1010-mal, bei 2) 820-mal, bei 3) 1190-mal. Schätze die Wahrscheinlichkeiten für die Augenzahlen 1 bis 6. (Gegenüberliegende Augenzahlen summieren sich zu 7. |  |

|  |
| --- |
| Für Laplace-Zufallsgeräte sind lange Versuchsreihen nicht nötig, da deren Ergebniswahrscheinlichkeiten aufgrund von Symmetrien bekannt sind:  p = .  Hat man allerdings den Verdacht, dass ein Laplace-Gerät manipuliert ist, dann lässt sich durch lange Versuchsreihen die statistische Wahrscheinlichkeit hinreichend genau bestimmen. Stimmt die nicht mit der beabsichtigten klassischen Wahrscheinlichkeit überein, so ist der Verdacht bestätigt. |

2. Zwei Gangster spielen Mensch-ärgere-dich-nicht um 1000 €. Black Joe verliert haushoch. Da beide mit einem eigenen Würfel geworfen haben, vermutet er, dass sein Gegner Old Jim seinen Würfel gezinkt (manipuliert) hat und deshalb so häufig die 6 kam. Heimlich nimmt er seinen Würfel mit und prüft ihn in einer Testserie.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Zahl der Würfe | 10 | 100 | 500 | 1000 | 2000 | 10000 |
| Zahl der Sechsen | 3 | 11 | 82 | 192 | 376 | 1897 |

a) Nach 10 Würfen springt er auf und will schon zu Old Jim stürzen und ihn beschuldigen, gemogelt zu haben. Wie kommt er darauf? Ist die Reaktion in Ordnung?

b) nach 100 würfen will er schon aufhören mit seinem Test. Warum wohl? Was rätst du ihm?

c) Schätze selbst die Wahrscheinlichkeit nach 500 Würfen. Ist der Würfel okay?

d) Nach 1000, 2000 und 10000 Würfen zeichnet sich die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis ab. Schätze sie. Ist der Würfel gezinkt?

3. Roulette-Prüfung

|  |  |
| --- | --- |
|  | Bei einem Roulette wird eine Manipulation vermutet. Deshalb wird es in einem Langzeittest 50 000mal geprüft. Dabei gibt es für die sechs Zahlen in der Tabelle unten die angegebenen Häufigkeiten. Wie lautet das Prüfungsergebnis?  Info: Auf einer Roulette-Drehscheibe stehen die Zahlen von 1 bis 36 und die 0. |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Zahl | 11 | 4 | 15 | 8 | 19 | 30 |
| Häufigkeit | 1345 | 2493 | 2501 | 1352 | 2498 | 1359 |

Lösungen zum Schätzen von Wahrscheinlichkeiten II

1. a) Wahrscheinlichkeiten für die 1

Würfel I:  = 20,2 %; geschätzte Wahrscheinlichkeit für 1: rund 20 %.

Würfel II:  = 16,4 %; geschätzte Wahrscheinlichkeit für 1: rund  (normaler Würfel).

Würfel III:  = 23,8 %; geschätzte Wahrscheinlichkeit für 1: rund 24 %.

b) Wahrscheinlichkeit für die anderen Augenzahlen

**Würfel I:** 2 und 5 wie für 1 und 6 jeweils 20 %. Für 3 und 4 bleiben insgesamt

20 %, also jeweils 10 %.

**Würfel II:** Wie bei einem normalen Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für alle Augenzahlen gleich, nämlich .

**Würfel III:** Für 2 und 5 wie für 1 und 6, jeweils 24 %. Für 3 und 4 bleiben insgesamt nur 4 %, also jeweils 2 %. VORSICHT: In 7. a) III durfte die Wahrscheinlichkeit nicht auf 25 % geschätzt werden, da dann die Wahrscheinlichkeit für 3 und 4 Null wäre.

2. Hier die Auswertung der Versuche:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Zahl der Würfe | 10 | 100 | 500 | 1000 | 2000 | 10000 |
| Zahl der Sechsen | 3 | 11 | 82 | 192 | 376 | 1897 |
| Anteil der Sechsen | 33,3 % | 11,0 % | 16,4 % | 19,2 % | 18,8 % | 18,97 % |

a) Nach 10 Würfen scheint die 6 viel zu häufig zu kommen. Aber die Zahl der Würfe ist viel zu klein, um eine brauchbare Aussage machen zu können.

b) Nach 100 Würfen liegt die relative Häufigkeit deutlich unter ein Sechstel. Aber die Zahl der Würfe ist immer noch viel zu gering für eine gesicherte Aussage.

c) Bei 500 Würfen liegt die relative Häufigkeit bei etwa ein Sechstel. Aber die Anzahl…

d) Nach 1000, 2000 und 10000 Würfen zeichnet sich die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis ab. Sie liegt bei etwa 19%. Der Würfel ist tatsächlich gezinkt.

3. Roulette-Prüfung

Hier die Auswertung:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Zahl | 11 | 4 | 15 | 8 | 19 | 30 |
| Häufigkeit | 1345 | 2493 | 2501 | 1352 | 2498 | 1359 |
| Relative Häufigkeit | 2,7 % | 5,0 % | 5,0 % | 2,7 % | 5,0 % | 2,7 % |

Die Laplace-Wahrscheinlichkeit für jede Zahl (0 bis 36) auf dem Roulette beträgt

 ≈ 2,7 %.

Die Zahlen 4, 15 und 19 haben eine zu große (geschätzte) Wahrscheinlichkeit von etwa 5,0 %. Sie sind manipuliert. Da sie auf dem abgebildeten Roulette direkt nebeneinader liegen, ist vermutlich unter den drei Zahlen eine Manipulation wie ein kleiner Magnet angebracht.