

Intention, Aufgabe und Hinweise

Transformationen von Funktionen sind laut KLP SEK II obligatorischer Inhalt der Einführungsphase:

„Die Schülerinnen und Schüler wenden einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf Funktionen (Sinusfunktion, quadratische Funktion, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen) an und deuten die zugehörigen Parameter.“ (KLP, S. 23)

Es handelt sich dabei um Verfahren, die universell mit allen Funktionen funktionieren und deshalb auch erst nach Kenntnis aller Funktionsklassen erlernt und erprobt werden sollten.

Die Selbstlernumgebung ist in zwei Teilen aufgebaut:

Teil 1: Entdecken und Lernen der Werkzeuge mit ansteigendem Anspruchsniveau:

Aufgabe 1: Das Werkzeug „Verschieben in y-Richtung“ erschließt sich fast von selbst und kann zusätzlich durch manuelles Verschieben des Graphen und Beobachtung der Funktionsvorschrift entdeckt werden.

Aufgabe 2: Hier wird gezeigt, wie man eine etwas knifflige Regel formulieren kann. Die Schwierigkeit ist, die Regel richtig anzuwenden, indem man den ganzen Term negativiert.

Aufgabe 3: Strecken/Stauchen ist bekannt und muss nur sorgfältig angewendet werden. Es ist nun selbst eine Regel zu formulieren.

Aufgabe 4: Das Werkzeug für das Verschieben in x-Richtung ist nicht leicht zu finden und auch nicht leicht zu formulieren. Immerhin kann man es wieder durch die manuelle Verschiebung entdecken.

Aufgabe 5: Zur Differenzierung die Spiegelung an der y-Achse – da können sich die Starken austoben

Teil 2: Üben, anwenden, vertiefen

Pflicht:

1 Transformationen erkennen und nachbilden

Auswahl:

2 Mehr oder weniger anspruchsvolle Bilder können erzeugt werden

3 Eine besondere Herausforderung (auch für Lehrer?): Stauchen in x-Richtung

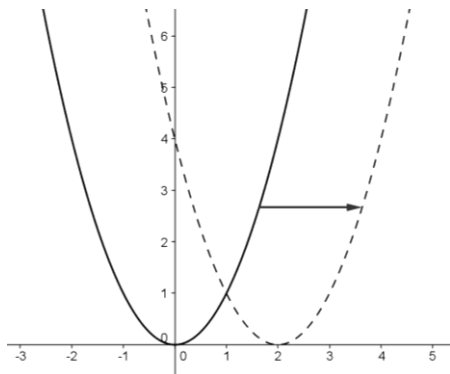
4 Anwendung der Transformationen auf die Sinusfunktion

Transformationen von Funktionen und ihren Graphen

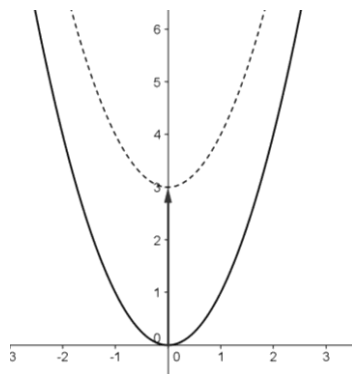
– eine Selbstlernaufgabe –

Zunächst legen wir einige Begriffe fest:

Unter der **Verschiebung** eines Graphen oder einer Funktion in x-Richtung oder in y-Richtung versteht man, dass der Graph seine Position verändert ohne dass er seine Form verändert (der neue Graph ist kongruent zum alten Graphen).



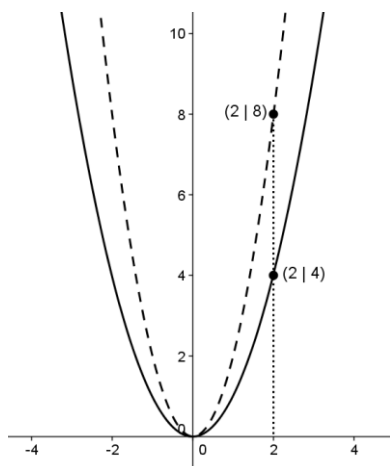
Verschiebung in x-Richtung



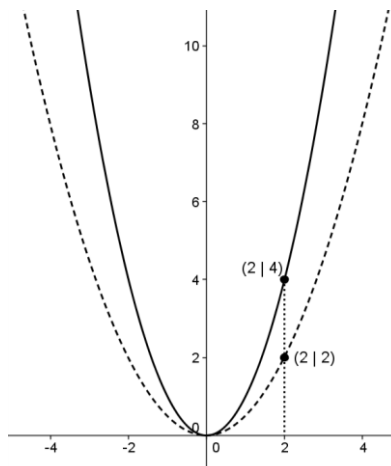
Verschiebung in y-Richtung

Unter dem **Strecken** eines Graphen oder einer Funktion versteht man, dass alle Funktionswerte mit dem gleichen Faktor vergrößert werden. Strecken mit dem Faktor 2 bedeutet also, dass die y-Werte aller Punkte des Graphen doppelt so groß werden.

Unter dem **Stauchen** eines Graphen versteht man, dass alle Funktionswerte mit dem gleichen Faktor verkleinert werden. Stauchen mit dem Faktor 0,5 bedeutet also, dass die y-Werte aller Punkte des Graphen halb so groß werden.



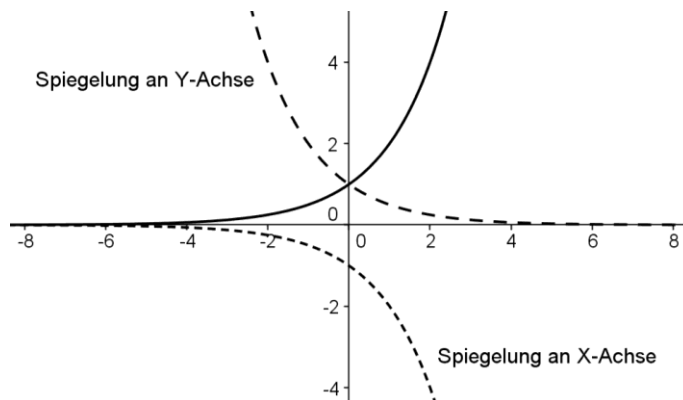
Streckung mit dem Faktor 2



Stauchung mit dem Faktor 0,5

Unter dem **Spiegeln** des Graphen einer Funktion an der x-Achse oder an der y-Achse versteht man das Spiegeln an einer Spiegelgeraden im üblichen Sinn.

Wenn man also einen Spiegel auf die entsprechende Achse legt, so sieht man im Spiegel den gespiegelten Graphen.



Teil 1: Mit diesem Arbeitsblatt sollst Du allgemeine Werkzeuge für die Transformation von Funktionen und ihren Graphen kennen lernen. Nachdem Du die Regeln verstanden hast, sollst Du sie jedes Mal auf die folgenden Funktionen anwenden, um zu prüfen, ob Du die Regel wirklich verstanden hast:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$f(x) = 1.5^x$$

$$f(x) = 0.4x$$

$$f(x) = -0.5x + 2$$

$$f(x) = -x^2 + 0.4x - 3$$

$$f(x) = \sin(x)$$

Dazu gibst Du die Funktion zunächst bei Geogebra mit $f(x) = \dots$ ein. Dann gibst Du die veränderte Funktionsvorschrift $g(x) = \dots$ ein, indem Du die Regel anwendest. Nun überprüfst Du anhand der beiden Graphen, ob die gewünschte Transformation entstanden ist. Wenn nicht, so musst Du überlegen und ausprobieren, was bei g geändert werden muss.

Aufgabe 1: Verschieben in y-Richtung

Verschieben in **y**-Richtung kannst du bereits, oder? Zeichne jeweils den Graph der angegebenen Funktionen und dann einen um 2 nach oben und einen um 3 nach unten verschobenen Graph, indem Du die Funktionsvorschrift passend veränderst (Nenne die neue Funktion immer g).

Überprüfe genau, ob du die richtige Wirkung erzielt hast. Tipp: Du kannst den Graph auch dadurch verschieben, dass Du ihn durch Anklicken markierst und dann ziehst! (Dazu muss im Gestaltungs Menü des Graphen das Schloss geöffnet sein!) Das Ergebnis wird im Algebrafenster angezeigt!

Formuliere (und notiere in deiner Mappe): Die Verschiebung eines Graphen in y-Richtung erreicht man, indem man die Funktionsvorschrift folgendermaßen abändert:

Aufgabe 2: Spiegeln an der y-Achse – hier wird die Regel verraten

Zeichne den Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Spiegle den Graph von f an der y-Achse, indem Du folgende Regel anwendest:

Den Graph einer Funktion spiegelt man an der y-Achse, indem man in dem Funktionsterm jedes „x“ durch „-x“ ersetzt.

Überprüfe genau, ob du die richtige Wirkung erzielt hast. Durch Verwendung des Werkzeugs „Spiegle Objekt an Gerade“ kannst Du Dein Ergebnis überprüfen!

Überprüfe anhand der anderen Funktionen, ob Du die Regel beherrschst!

Aufgabe 3: Strecken und Stauchen des Graphen

Zeichne den Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 1$ und versuche, ihn mit dem Faktor 2 zu strecken, indem Du die Funktionsvorschrift passend veränderst. Überprüfe, ob sich wirklich alle Funktionswerte verdoppelt haben!

Teste Dein Ergebnis mit den anderen Funktionen. Überprüfe, ob du die richtige Wirkung erzielt hast.

Formuliere: Den Graph einer Funktion streckt man mit dem Faktor 2, indem man ...

Wenn die Funktionswerte der neuen Funktion kleiner sind als die ursprünglichen, so nennt man das „Stauchen“. Versuche, die Funktionen auf die Hälfte zu stauchen!

Formuliere: Den Graph einer Funktion staucht man auf die Hälfte, indem man ...

Aufgabe 4: Verschieben nach links und rechts

Zeichne den Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 1$ und versuche, ihn um 1 nach rechts zu verschieben, indem Du die Funktionsvorschrift verändertest. Überprüfe genau, ob du die richtige Wirkung erzielt hast: Du kannst den Graph auch dadurch verschieben, dass Du ihn durch Anklicken markierst und dann ziehst! (Dazu muss im Gestaltungsmenü des Graphen das Schloss geöffnet sein, und dazu wiederum musst Du unter Einstellungen den Haken bei „Objekt fixieren“ entfernen!) Nun kannst Du im Algebrafenster sehen, wie sich die Funktionsvorschrift verändert.

Teste Dein Ergebnis mit den anderen Funktionen.

Formuliere: Den Graph einer Funktion verschiebt man um den Wert c in x -Richtung nach rechts, indem man ... um c nach links, indem man ...

Aufgabe 5: Spiegeln an der x -Achse

Zeichne den Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 1$ und versuche sein Spiegelbild an der x -Achse zu zeichnen, indem Du die Funktionsvorschrift passend veränderst. Teste Dein Ergebnis mit den anderen Funktionen. Überprüfe jeweils genau, ob du die richtige Wirkung erzielt hast.

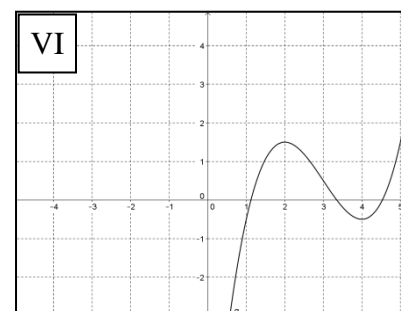
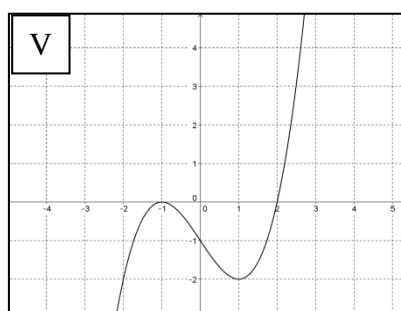
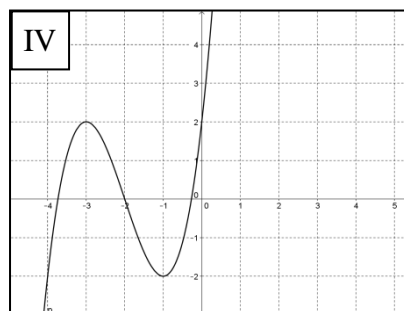
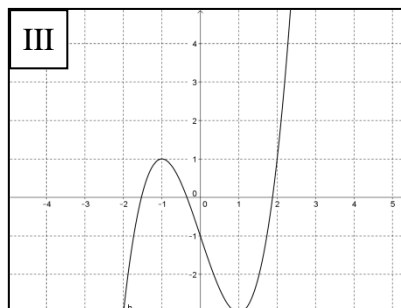
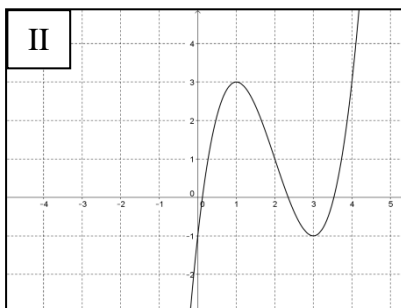
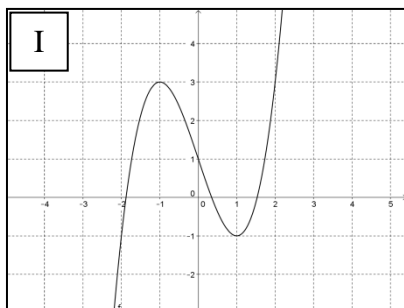
Tipp: Wenn Du den Punkt (x, y) an der x -Achse spiegelst, so erhältst Du $(x, -y)$. Bei der Funktionsvorschrift des Spiegelbildes muss also z.B. $g(3)$ den negativen Wert von $f(3)$ haben.

Formuliere: Den Graph einer Funktion spiegelt man an der x -Achse, indem man ...

Teil 2: Üben, anwenden, vertiefen: Aufgabe 1 ist Pflicht, danach darf ausgesucht werden. Aufgabe 3 ist besonders anspruchsvoll, ebenso der zweite Teil von Aufgabe 4.

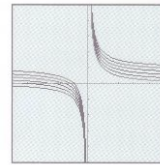
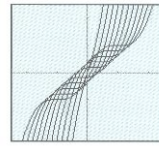
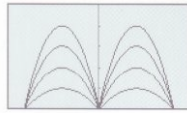
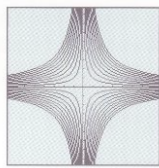
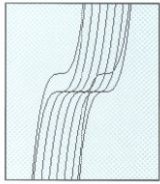
Üben, anwenden, vertiefen 1 – Transformationen erkennen:

Der Graph der Funktion $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (Bild I) wurde auf verschiedene Weisen transformiert (Bild II bis VI). Finde diese Transformationen heraus, schreibe die neue Funktionsvorschrift auf und überprüfe mit Geogebra! Manchmal wurden 2 Transformationen nacheinander angewendet!



Üben, anwenden, vertiefen 2 – Bilder zeichnen:

Versuche durch fortgesetzte Transformation einer Funktion diese Graphenbilder zu erzeugen oder erfinde eigene Bilder!



Üben, anwenden, vertiefen 3 – eine neue Regel:

Man könnte den Graph einer Funktion auch in x-Richtung stauchen oder strecken.

a) Notiere eine Beschreibung der Stauchung in x-Richtung und zeichne auch ein entsprechendes Schaubild zur Veranschaulichung. Orientiere Dich an den Texten auf der Seite 1.

b) Zeichne den Graph einer Funktion und versuche ihn in x-Richtung mit dem Faktor 0,5 zu stauchen, indem Du die Funktionsvorschrift passend veränderst. Teste Dein Ergebnis mit den Funktionen aus Aufgabe 1.

Üben, anwenden, vertiefen 4 – Manipulationen nachbauen:

Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ wurde manipuliert. Finde die neue Funktionsvorschrift!

