***Nullstellen***

**Einführung:**

„Nullstellen“ sind dir aus der Sek I bekannt. Nullstellen sind dir z.B. begegnet als …

1. Schnittpunkte von Graphen mit der x-Achse
2. Stellen, an der der y-Wert einer Funktion Null wird (hier gab es für verschiedene Funktionen besondere Lösungsverfahren…)
3. Momente in Sachaufgaben, an denen irgendetwas Besonderes passiert

C:



**A:**



B:

Es gibt in der Mathematik der Oberstufe viele weitere Anlässe, die das Auffinden von Nullstellen erfordern. Deshalb musst du die notwendigen Techniken lernen, mit denen du Nullstellen finden kannst.

Der GTR kann dir dabei eigentlich immer helfen. Wie du ihn sinnvoll einsetzen kannst, das sollst du hier lernen.

Manchmal aber wird auch verlangt, dass du die Nullstellen ohne Taschenrechner findest. Und auch das sollst du lernen und das musst du auch trainieren.

Dazu dient diese Lernumgebung. Gemeinsam steigen wir mit den Aufgaben 1 und 2 in das Thema ein. Die weiteren Aufgaben wirst du selbstständig erledigen. Es handelt sich um eine Langzeitaufgabe, die du in den nächsten vier Wochen – statt der üblichen Hausaufgaben – bearbeiten musst. Parallel zu dieser Arbeit führst du ein Lerntagebuch, in dem du jeweils notierst

* wann du an welcher Aufgabe wie lange gearbeitet hast
* welche Probleme aufgetreten sind
* was du gelernt hast
* und was dir sonst noch wichtig ist.

Jeweils zu Beginn einer Doppelstunde gibt es die Möglichkeit, sich 10 Minuten mit den Mitschülern auszutauschen und Fragen zu klären. Diese Fragen müssen vorher im Forum unserer wwschool-Gruppe formuliert worden sein, vielleicht wurden sie dort auch schon kommentiert?

Nach den 4 Wochen werden wir einen Test schreiben, in dem abgeprüft wird, ob du alles beherrschst. Das Lerntagebuch wird kontrolliert.

**Aufgabe 1:** *Ganz offensichtlich? Eine Aufgabe für Partnerarbeit!*

1. Manchmal kann man an der Funktionsgleichung die Nullstellen sofort sehen. Ermittle für die folgenden Gleichungen die Nullstellen durch „Hingucken“ oder durch ein bisschen Probieren.

I) II) III) IV)

V) VI) VII) VIII)

1. Begründe deinem Partner, warum die gefundenen Zahlen die Nullstellen sind und erkläre ihm, wie du sie gefunden hast.
2. Erfinde selbst einige Gleichungen, denen man die Nullstellen ohne zu rechnen ansehen kann und stelle sie Deinem Partner als Aufgabe!

**Aufgabe 2:** *Und wenn man die Lösung nicht sieht?*

Da bietet dir zunächst Geogebra verschiedene Möglichkeiten, die mit dieser Aufgabe erlernt werden sollen. Sie haben alle ihre Vor- und Nachteile und wir wollen auch herausarbeiten, worin diese Vor- und Nachteile bestehen.

Vorbereitung: Stelle im Gestaltungsmenü des Algebrafenster „Definition & Wert“ ein. Gib die Funktionsvorschrift im Algebrafenster ein.

* Du kannst nun am Graph die Stellen, an denen er die x-Achse schneidet ungefähr ablesen.
* Du kannst die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse konstruieren. (Anleitung: Verwende das Werkzeug „Schneide“ aus dem Punktwerkzeugkasten). Die Punkte werden im Algebrafenster angezeigt
* Du kannst den Befehl Nullstelle[f] eingeben. Die Schnittpunkte werden angezeigt.
* [Zusatz: Du kannst einen Schieberegler a definieren mit dem vorletzten Werkzeugkasten. Nun gibst Du ins Algebrafenster f(a) ein. Der Funktionswert der Stelle a wird angezeigt. Nun schiebst Du den Schieberegler vorsichtig, bis das Vorzeichen von f(a) wechselt. Da muss eine Nullstelle liegen. Eventuell musst Du die Grenzen des Schiebereglers verändern, um alle Nullstellen zu finden.]

1. Führe alle drei Verfahren für die folgende Funktion durch:

(Tipp: Es gibt mehr als 3 Nullstellen – verwende daher auch den Zoom!)

**Aufgabe 3**

Überprüfe nun ebenso mit Hilfe von Geogebra, ob du bei Aufgabe 1 wirklich alle Nullstellen gefunden hast! Notiere kurz, welches Verfahren du verwendet hast.

So, hier beginnt nun die Langzeitaufgabe. Zunächst geht es um die Bedeutung von Nullstellen in einem Sachzusammenhang. Danach sollst du die verschiedenen Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen ohne GTR lernen.

**A) Die Bedeutung von Nullstellen in einem Sachzusammenhang**

**Aufgabe 3:** *Zur Sache: Nullstellen in Sachproblemen*

In den nachfolgenden Sachsituationen haben die Nullstellen manchmal eine besondere Bedeutung. Erkläre die inhaltliche Bedeutung der Nullstellen.

**Die Berechnung wird an dieser Stelle noch nicht verlangt!**

1. Eine 12cm lange Kerze brennt pro Stunde 2,4cm ab.
2. Das Güllefass von Bauer Hollenbeck fasst 5000 Liter. Der Entleerungsvorgang schafft 400 Liter pro Minute.
3. Die Flugbahn eines Fußballs beim Einwurf wird durch folgende Funktion modelliert:

f(x) = –0,1x² + x + 2.

1. In einer Firma, die Saftpressen herstellt, kann der Gewinn (in 1000€) in Abhängigkeit von der Anzahl der produzierten Saftpressen (in 10 000 Stück) durch folgende Funktionsgleichung beschreiben werden:

G (x) = – 0,01x³ + 1,5x + 1

1. Eine Bakterienkultur wird vergiftet. Die folgende Funktionsgleichung modelliert die Abnahme der Bakterienzahl in Abhängigkeit von der Zeit (in Stunden).

B (x) = 5000  – 1

[Tipp: Es gibt nur ganze Bakterien!]

**Aufgabe 4:**

Du hast es geahnt: Bestimme nun die Nullstellen der Aufgaben von Aufgabe 3. Du darfst dazu natürlich sämtliche Funktionen Geogebra verwenden – notiere immer kurz, wie du vorgegangen bist. Notiere auch das Ergebnis der Sachaufgaben in einem Satz.

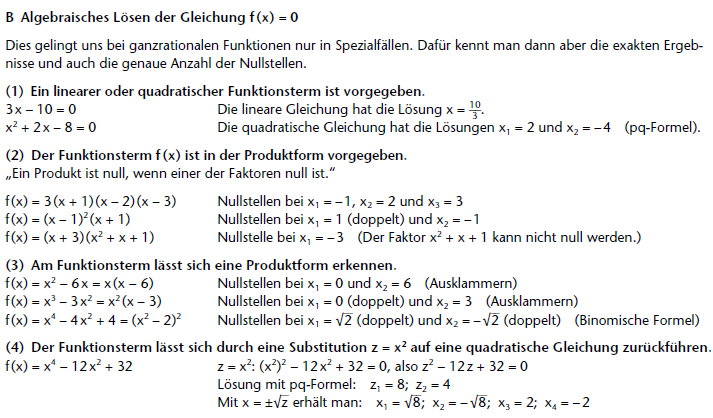
**B) Die Bestimmung von Nullstellen ohne Geogebra und ohne „Probieren“**

Das Finden einer Nullstelle ist gleichbedeuten mit dem Lösen einer Gleichung. Denn wenn man die Nullstelle der Funktion finden will, muss man ja die Gleichung lösen. Es geht also darum, Methoden zu finden, mit denen man Gleichungen lösen kann.

Mit dem exakten Lösen von Gleichungen ohne Hilfsmittel und ohne Ausprobieren oder durch Näherungsrechnungen ist das nun so eine Sache. Die Mathematiker haben in den letzten Jahrtausenden sehr viel Mühe darauf verwendet, algebraische Lösungsverfahren zu entwickeln. Und sie haben auch viele Lösungsverfahren entdeckt, die aber alle einen enormen Nachteil haben: Sie funktionieren immer nur für ganz bestimmte Gleichungsarten. Ein ganz allgemeines Verfahren haben sie nicht entdeckt. Und noch viel schlimmer: Sie haben sogar bewiesen, dass es Gleichungen gibt, für die es **gar kein** Lösungsverfahren gibt. Übrigens ist eine solche Gleichung.

Nun, aus gutem Grund sollst du im Laufe deiner Schulzeit aber einige besonders wichtige dieser algebraischen Lösungsverfahren kennen lernen und sie auch anwenden können. Denn die Entwicklung solcher systematischer Methoden ist ein wichtiger Aspekt der Wissenschaft Mathematik. Diese Methoden beziehen sich fast ausschließlich auf ganzrationale Funktionen.

Auf S. 138 gibt dein Buch eine Übersicht über genau die Methoden, die du lernen musst:

  
  
Wenn nun die Lösung einer Gleichung durch den Operator „Berechne“ verlangt wird, kannst du sicher sein, dass eine dieser Methoden anzuwenden ist.

Nun musst du also zweierlei lernen:

1. Du musst erkennen, welche Methode du verwenden kannst.
2. Du musst die Methode beherrschen.

*Für die folgenden Aufgaben 5 und 6 kannst du die Lösungswege kontrollieren – du findest sie bei wwschool. Wenn du einen Fehler gemacht hast, so schreibe neben deiner Lösung auf, welchen Fehler du gemacht hast und bearbeite diese Aufgaben noch einmal.*

**Aufgabe 5**

1. Sieh dir die folgenden Gleichungen an: Welche kann man mit welcher Methode lösen? Kreuze an:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Gleichung | Lösungsverfahren | | | | | |
|  | (1) linear | (1) quadratisch | (2) Produkt | (3) ausklammern | (4) Substitution | Nix davon geht |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

1. Löse die Gleichungen nun. Überprüfe jeweils mit Geogebra und durch Einsetzen, ob die Lösungen richtig sind und ob du alle gefunden hast!
2. Manche Gleichungen muss man erst umformen, damit man erkennt, zu welchem Lösungstyp sie gehören. Forme die folgenden Gleichungen zunächst so um, dass sie zu einem der Fälle (1) bis (4) passen. Dazu müssen alle Termanteile auf die linke Seite gebracht und dort zusammengefasst werden. Rechts von dem Gleichheitszeichen steht dann eine Null. Löse die Gleichungen dann!

2

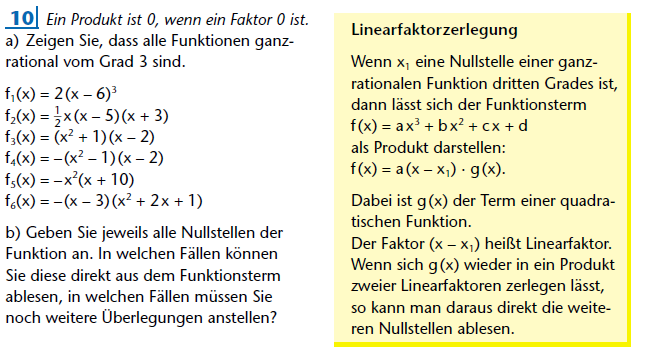
**Aufgabe 6** – Training – Du kannst Deine Ergebnisse immer mit Geogebra (Nullstelle[<polynom>] prüfen

Verfahren (1) linear und quadratisch: Wenn du diese Verfahren aus der Mittelstufe nicht mehr beherrschst, so musst du das trainieren. Das gleiche gilt auch für das Zusammenfassen von Termen (Aufgabe 5, Teil c). Eine Übersicht findest du auf den Seiten 215, 218, 219, 220, 227 und 228. Üben kannst du z.B. hier.

<http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1al/lg/lgindex.html>

<http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1al/qg/qgindex.html>

Verfahren (2)



Verfahren (3):

Verfahren (4):

Vermischtes (2) bis (4):

