Dächer, Seile, Leitern (zu Pythagoras)

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Ein Neubau ist 11,20 m breit. Die dreieckige Giebelwand hat die Höhe 3,30 m. Die Dachbalken sollen 30 cm  überstehen.  Wie lang müssen die Dachbalken sein? |  |
|  |  |
| 2. Eine Garage hat die in der Zeichnung angegebenen Maße. Die Dachsparren stehen vorn und hinten je 30 cm über.  Wie lang sind die Dachsparren? |  |
|  |  |
| 3. Ein Sendemast ist durch Stahltaue abgesichert, die in  90 m Höhe am Mast befestigt sind. Die Taue sind 120 m vom Mast entfernt im Erdboden verankert. Wie lang sind die Taue?  (Das Durchhängen der Taue bleibe bei der Berechnung unberücksichtigt.) |  |
|  |  |
| 4. Eine 12,20 m lange Leiter soll an einer Hauswand aufgestellt werden. Der Fuß der Leiter steht 2,20 m von der Wand entfernt. Wie hoch reicht die Leiter?  Anweisung: Fertige zuerst eine Skizze an. | |
|  |  |
| 5. Ein Feuerwehrwagen kann bis auf 7 m an ein Hochhaus heranfahren. Wie lang muss die Feuerwehrleiter ausgezogen werden können, um ein Fenster in 27 m Höhe zu erreichen? Die Höhe des Wagens beträgt 3 m.  Reicht ein Feuerwehrwagen mit einer 22 m langen Leiter? | |

|  |  |
| --- | --- |
| Die Bezeichnung "Satz des Pythagoras" ist übrigens irreführend und historisch falsch: Der Satz war – lange vor Pythagoras – den Indern, Babyloniern und den Chinesen bekannt. Ob aber Pythagoras selbst ihn gekannt hat, ist fraglich. |  |

Lösungen zu Dächer, Seile, Leitern

1. Ich nenne die Länge der Dachbalken ohne Überstand s.

s2 = 3,32 + (11,2 : 2)2

s = 6,5

Mit dem Überstand sind die Dachbalken 6,80 m lang.

2. Ich nenne die Länge der Dachbalken ohne Überstand oben und unten s.

s2 = 42 + (2,9 – 2 )2

s = 4,1

Mit dem Überstand oben und unten sind die Dachbalken 4,70 m lang.

3. Die Länge eines Taues nenne ich L.

L2 = 1202 + 902

L = 150 m

Die Taue sind einzeln 150 m lang.

4.

|  |  |
| --- | --- |
| h2 + 2,22 = 12,22  h = 12  Die Leiter reicht 12m hoch. |  |

5.

|  |  |
| --- | --- |
| Die Länge der ausgefahrenen Feuerwehrleiter nenne ich L.  L2 = 72 + (27 – 3)2  L = 25  Die Leiter muss bis auf 25 m ausgezogen werden können. Eine 22-m-Leiter eicht nicht bis zum Fenster. |  |

**Trigonometrie im Dreieck**

|  |  |
| --- | --- |
| Rechts steht ein Dreieck mit dem rechten Winkel . Als **Hypotenuse** bezeichnet man die längste Seite des rechtwinkligen Dreiecks. Sie liegt dem rechten Winkel gegenüber. Als **Kathete** wird jede der beiden kürzeren Seiten im rechtwinkligen Dreieck bezeichnet. Sie bilden die Seiten des rechten Winkels.  Die **Ankathete des Winkels**  liegt am Winkel, die **Gegenkathete zu**  liegt dem Winkel gegenüber. | [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a7/Right-triangle.svg/330px-Right-triangle.svg.png](https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Right-triangle.svg)  (wikipedia, 19.6.2018) |
|  |  |

Der Strahlensatz besagt, dass das Längenverhältnis von zwei Seiten im rechtwinkligen Dreieck immer gleich ist, egal, wie groß das Dreieck ist. Deshalb kann man zu jedem Winkel eine Tabelle z.B. im Taschenrechner anlegen, die das Verhältnis angibt. Drei Seitenverhältnisse werden von Mathematikern häufig benutzt.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| sin =  gesprochen: sinus alpha | cos =  gesprochen: cosinus alpha | tan  gesprochen: tangens alpha |

**Hat man in einem rechtwinkligen Dreieck eine Seite und einen Winkel (nicht nur den rechten) gegeben, so kann man die Länge der beiden anderen Seiten ausrechnen.**

**Beispiele**

1.Gegeben: b = 8 m; α = 30°. Gesucht: a.

8 m

30°

a

Da von α aus gesehen die Gegenkathete und die Hypotenuse

gegeben sind, nutzt man hier den Sinus.

sin 30° =  ⇒ a = 8 ∙ sin 30° = 8 ∙ 0,5 = 4.

Die Seite a hat eine Länge von 4 m. Die Länge von b kann man z.B. mit dem Satz von Pythagoras berechnen; oder mit dem Cosinus.

2.Gegeben: b = 10 m; α = 35°. Gesucht: c.

Wegen Hypotenuse (gegeben) und Ankathete (gesucht) – cos:

10 m

35°

c

cos 35° =  ⇒ c = 10 ∙ cos 35° ≈ 10 ∙ 0,82 = 8,2.

Die Seite c hat eine Länge von 8,20 m.

3.Gegeben: a = 4 m; α = 40°. Gesucht: c.

Gegenkathete zu 40°gegeben, Ankathete gesucht – tan:

4 m

40°

c

tan 40° =  ⇒ c =  ≈  ≈ 4,76.

Die Seite c hat eine Länge von 4,76 m.

**Umgekehrt: Hat man in einem rechtwinkligen Dreieck zwei Seiten, so kann man die Winkel im Dreieck berechnen.**

4.Gegeben: c = 20 m; b = 7 m. Gesucht: β

7 m

20 m

β

Gegenkathete zu β gesucht, Hypotenuse gegeben – sin:

sin β =  = 0,35.

Die Funktion "sin" weist einem Winkel ein Seitenverhältnis zu: β 0,35.

Hier ist der umgekehrte "Weg" gesucht. Zu berechnetem Seitenverhältnis ist der Winkel gesucht: β  0,35.

Die Problemstellung ist "umgekehrt"; diese Zuordnung nennt man Umkehrfunktion, auf dem Taschenrechner sin-1.

sin-1(0,35) ≈ 20,5° (falls DEG eingestellt ist)

Ergebnis: Der Winkel β hat die Größe 20,5°.

5. Als Straßensteigung ist 5 % angezeigt auf dem Verkehrsschild:

5 %

Gemeint ist damit: tan α = 5 % = 0,05. Gesucht: α.

α

tan-1 (0,05) ≈ 2,9°. Der Steigungswinkel beträgt 2,9°.

6. Gegeben: b = 3 m; a = 6 m. Gesucht: γ.

3 m

6 m

γ

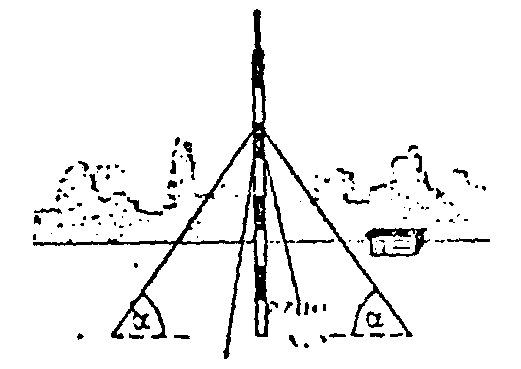
cos γ =  = 0,5; cos-1 (0,5) ≈ 60°

Der Winkel γ beträgt 60°.

**Übungen**

Nötig ist immer eine Skizze des Dreiecks, mit dem gearbeitet wird, samt aller Daten und Bezeichnungen.

1. Eine Leiter der Länge 5,40 m lehnt an einer Hauswand. Die Leiter bildet mit der Hauswand einen Winkel von 20°.

 Wie groß ist der Abstand des unteren Leiterendes von der Wand?

2. Ein Sendemast soll mit vier Seiten von je 40 m Länge gehalten werden. Der Neigungswinkel α der Seile soll 55° betragen.

In welcher Höhe müssen die Seile befestigt werden?

3. In welcher waagerechten Entfernung vom Fußpunkt erscheint unter einem Höhenwinkel von 12°:

a) die Turmspitze des Straßburger Münsters ( h = 143 m),

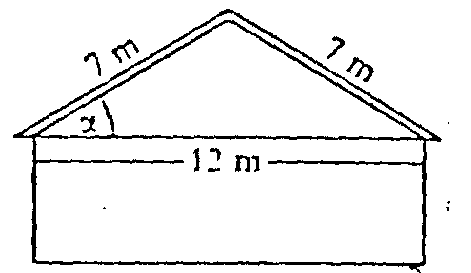
b) die Spitze des Eiffelturms in Paris (h = 300 m)?

4. Eine Seilbahn überwindet

a) auf einer ersten Teilstrecke von 250 m Länge eine Höhendifferenz von 180 m.

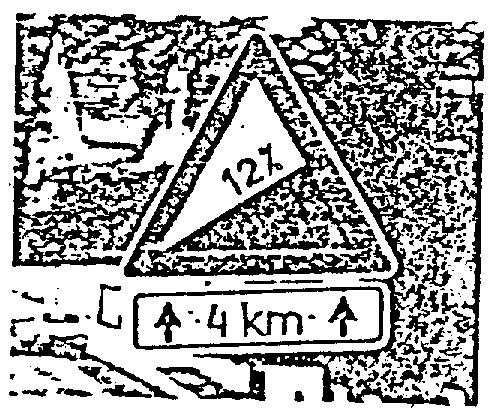
b) auf einer zweiten Teilstrecke von 124 m Länge eine Höhendifferenz von 78 m.

Wie groß sind die Steigungswinkel der beiden Teilstrecken?



5. Wie groß ist in der nebenstehenden Dachkonstruktion der Winkel α?

6. Der Schatten eines 4,50 m hohen Baumes ist 6 m lang.

 Wie hoch steht die Sonne, d.h. unter welchem Winkel treffen die Sonnenstrahlen auf den Boden?

7. Wie groß ist der Steigungswinkel, der aus dem

Schild gezeigt werden soll?

8. Bei welchem Steigungswinkel müsste auf dem Straßenschild 100% stehen?

**Trigonometrie im Dreieck - Lösungen**

1. sin 20° =  ⇒ c = 5,4 ∙ sin 20°

5,4

20°

c

≈ 1,85. Der Abstand beträgt 1,85 m.

2. sin 55° =  ⇒ a = 40 ∙ sin 55°

40

55°

a

≈ 32,77. Die Höhe beträgt rund 32,80 m.

143 m

12°

c

3.a) tan 12° =  ⇒ c = 

≈ 672,76. Die waagerechte Entfernung beträgt rd. 672,80 m.

300

12°

c

b) tan 12° =  ⇒ c = 

≈ 1411,38. Die waagerechte Entfernung beträgt rd. 1411 m.

180

250

α

4.a) sin α =  ⇒ α = sin-1 

≈ 46,05°. Der Steigungswinkel beträgt rd. 46° bzw. 0,8 (rad).

78

124

α

b) sin α =  ⇒ α = sin-1 

≈ 38,98°. Der Steigungswinkel beträgt rd. 39° bzw. 0,7 (rad).

6

7

α

5. cos α =  ⇒ α = cos-1 

≈ 31,00°. Der Neigungswinkel beträgt 31° bzw. 0,54 (rad).

6

4,5

α

6. tan α = ⇒ α = tan-1 

≈ 36,87°. Der Sonnenstandwinkel beträgt 37° bzw.0,64 (rad).

100

12

α

7. Auf 100 m steigt die Straße um 12 m bzw.

tan α = 12 % ⇒ α = tan-1 (0,12)

≈ 6,84°

Der Steigungswinkel beträgt 6,8°.

8. tan α = 100 % = 1 ⇒ α = tan-1 (1)

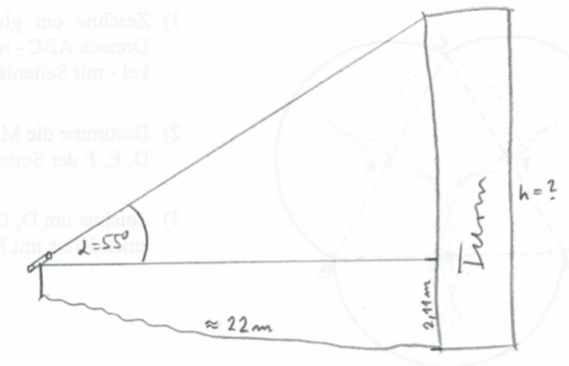
100

100

≈ 45°.

Der Straßensteigungswinkel beträgt 45°, und nicht wie häufig angenommen 90° !!!

**Vermessung der Turmhöhe**



(Handskizze, nicht maßstabsgerecht)

1. Der Winkel wird gemessen, die Augenhöhe (Höhenwinkel 0°) wird am Turm auf Zuruf markiert und nachgemessen. Die Bodenentfernung zum Turm wird gemessen. Sie ist in etwa so groß wie die waagerechte Entfernung. – Berechne die Turmhöhe h.



1. Der Winkel wird gemessen, die Augenhöhe wird am Turm markiert und nachgemessen. Der Winkel wird gemessen. – Berechne die Turmhöhe h.

**Lösung zur Turmhöhenberechnung**

1. Die Turmhöhe von dem Punkt der Augenhöhe bis oben nenne ich h1.

tan 55° =

h1 = 22 tan 55°

h1 31,42

h = h1 + 2,11 = 33,53

Der Turm ist rund 33,50 m hoch.

2a) Zunächst wird die waagerechte Entfernung zum Turm berechnet.

Die nenne ich x.

tan 5,6° =

h1 =

h1 21,52

b) Dann geht es weiter wie oben in 1.

tan 55° =

h1 = 21,52 tan 55°

h1 30,73

h = h1 + 2,11 = 32,84

Der Turm ist rund 32,80 m hoch.

Beide Messungen und Berechnungen führen auf eine ähnliche Höhe von etwa 33 m.