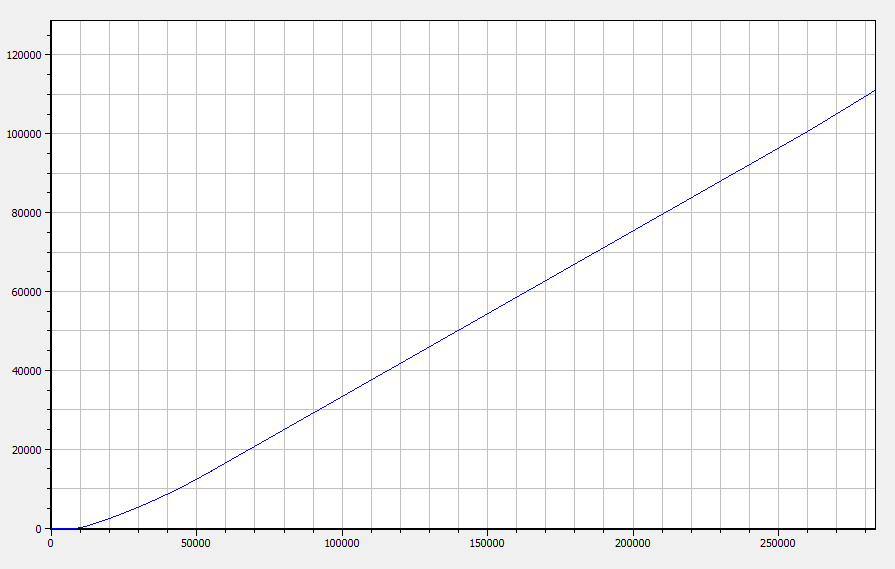
### Anwendungen zu Ausgangs- und Ableitungsfunktion

Steuern 2018

Die Steuerfunktion 2018 ist in 5 Teilfunktionen definiert (s. Zusatzblatt).

Steuern (in €)



Einkommen (in €)

1. a) Erläutere: Die Steuerfunktion darf gerechterweise keine Sprünge aufweisen.

b) Prüfe die 4 Übergangsstellen mit den Funktionstermen.

2. Berechne, wie viel Steuer bei folgenden Einkommen zu zahlen sind:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | a) 3500 €, | b) 10 000 €, | c) 50 000 €, | d) 120 000 €, | e) 300 000 €. |

3. a) Berechne, wie viel Steuer bei einem um 1 € höheren Einkommen zu zahlen ist.

b) Wie viel Steuer muss für "den letzten verdienten €" bezahlt werden? Wie entwickelt sich diese Steuer auf einen Mehrverdeinst?

4. Um die Steuer für Mehrverdienste schneller schätzen zu können, bestimmt man die erste Ableitung.

a) Erläutere: Die Steuer für "den letzten verdienten €" ist identisch mit dem Wert der Ableitung bei einem Einkommen x.

b) Notiere die 1. Ableitung für die fünf Bereiche.

c) Skizziere sie mit einem Funktionenplotter.

5. a) Berechne f '(x) für die 5 Einkommen in Aufgabe 2.

b) Vergleiche mit den Ergebnissen aus 3 b) und kommentiere 4 a).

6. Gut ist ein Steuertarif, wenn auch die Besteuerung des "letzten verdienten €" sich nicht sprunghaft ändert.

a) Prüfe die Übergangsstellen.

b) Erläutere den Zusammenhang von f und f '(x) bei der Untersuchung.

7. Unterscheide für den Zusammenhang hier exakte Stetigkeit und gerundete Quasi-Stetigkeit, ebenso exakte Differenzierbarkeit und gerundete Quasi-Differenzierbarkeit.

**Steuertarif im Gesetz 2018**

**§ 32a Einkommensteuertarif**

(1) Die tarifliche Einkommensteuer ab dem Veranlagungszeitraum 2018 bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt … jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 9 000 Euro (Grundfreibetrag):

0;

2. von 9 001 Euro bis 13 996 Euro:

(997,8 · y + 1 400) · y;

3. von 13 997 Euro bis 54 949 Euro:

(220,13 · z + 2 397) · z + 948,49;

4. von 54 950 Euro bis 260 532 Euro:

0,42 · x – 8 621,75;

5. von 260 533 Euro an:

0,45 · x – 16 437,7.

Die Größe „y“ ist ein Zehntausendstel des den Grundfreibetrag übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. Die Größe „z“ ist ein Zehntausendstel des 13 996 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. Die Größe „x“ ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

**Steuerfunktion 2018**

|  |  |
| --- | --- |
| Gültigkeitsbereich  0 bis 9000  9001 bis 13 996  13 997 bis 54 949  54950 bis 260532  260 533 bis … | Funktionsgleichung  f1(x) = 0  f2(x) = 997,810- 8 (x – 9000)2 + 0,14(x – 9000)    f3(x) = 220,1310- 8 (x – 13996)2 + 0,2397(x – 13996) + 948,49  f4(x) = 0,42 x – 8 621,75  f5(x) = 0,45 x – 16 437,70 |

x: zu versteuerndes Jahreseinkommen in €; f(x): zu zahlender Steuerbetrag in €

Bearbeitung zu Steuern 2018

1. a) Wenn eine Steuer von einem Einkommen zum 1 € höheren Einkommen um 100 € springt, so wäre das klar ungerecht. Das höhere Einkommen würde

99 € weniger Geld auf dem Konto bedeuten. Die Steuerfunktion muss klar sprungfrei sein.

b) ⦁ f1(9000) = 0;

f2(9001) = 997,810- 8 (9001 – 9000)2 + 0,14(9001 – 9000) 0,14

Differenz: 0,14

⦁ f2(13 996) = 997,810- 8 (13996 – 9000)2 + 0,14(13996 – 9000) 948,25

f3(13 997) = 220,1310- 8 12 + 0,23971 - 948,49 948,49

Differenz: 0,24

⦁ f3 (54 949) = 220,1310- 8 (x – 54949)2 + 0,2397(x – 54949) + 948,49 ≈

14 456,83

f4(54950) = 0,42  54950 – 8 621,75 = 14 457,25

Differenz: 0,42

* f4(260532) = 0,42  260532 – 8 621,75 = 100 801,69

f5(260533) = 0,45  269533 – 16 437,70 = 100 802,15

Differenz: 0,46

An den Übergängen f1/f2, f2/f3, f3/f4, f4/f5 gibt es lediglich Differenzen unter einem Euro (für den letzten verdienten Euro). Das ist akzeptabel. Die Steuerfunktion macht keine unerwarteten Sprünge.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 2. | a) f1(3500) = 0 | b) f2(10 000) ≈ 149,98 | c) f3(50 000) ≈ 12 432,17 |
|  | d) f4(120 000) = 41 778,25 | e) f5(300 000) = 118 562,30 |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 3. | a) f1(3501) = 0 | f2(10 001) ≈ 150,14 | f3(50 001) ≈ 12 432,57 |
|  | f4(120 001) = 41 778,67 | f5(300 001) = 118 562,75 |  |

b) Für den letzten verdienten € müssen folgende Steuern gezahlt werden:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 3500: 0 | 10 000: 0,16 | 50 000: 0,40 | 120 000: 0,42 | 180 000: 0,45 |

Mit zunehmendem Einkommen steigt die Steuerlast für einen Mehrverdienst von 1 €.

4. a) Zeichnet man die Sekante z. B. durch P1(120 000/41 778,25) und P2(120 001/41 778,67), so ist sie von der Tangente an die Steuerkurve in P1 nicht zu unterscheiden. Die Sekanten- und Tangentensteigung ist identisch. In 3) wird die Sekantensteigung zu h = 1 berechnet. Sie ist identisch mit der Tangentensteigung bzw. mit f '(x) an der gewählten Einkommensstelle.

b) Grenzsteuerfunktion 2018

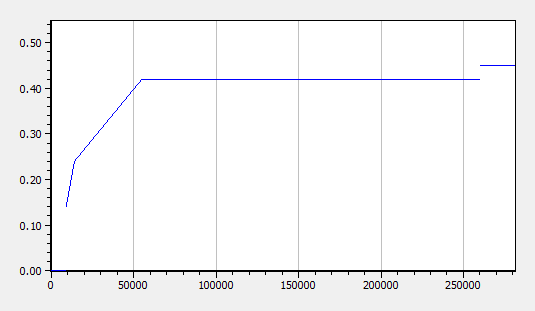
f1‘(x) = 0

f2‘(x) = 2997,810- 8 (x – 9000) + 0,14

f3‘(x) = 2220,1310- 8 (x – 13996) + 0,2397

f4‘(x) = 0,42

f5‘(x) = 0,45



Einkommen in €

Grenzsteuersatz

5. a) f1'(3500) = 0 = 0 Rechts stehen die Werte aus 3. b).

f2'(10 000) = 0,16 = 0,16

f3'(50 000) = 0,40 = 0,40

f4'(120 000) = 0,42 = 0,42

f5'(180 000) = 0,45 = 0,45

b) Die berechneten Sekantensteigungen in 3 b) und die Tangentensteigungen hier stimmen überein.

6. a) Wie an der Skizze der Grenzsteuerfunktion schon sehen ist, gibt es zwei Sprünge – bei 9000 und 260532.

f1'(9000) = 0; f2'(9000) = 0,14 – ein Sprung von 0 % auf 14 %

f2'(13 996) ≈ 0,2397; f3'(13996) = 0,2397 – kein Sprung

f3'(54 949) ≈ 0,42; f4'(54949) = 0,42 – kein Sprung

f4'(260532) = 0,42; f5'(260532) = 0,45 – ein Sprung von 42 % auf 45 %

Die Ableitung macht am Übergang f1/f2 einen Sprung, an den anderen Übergangsstellen macht sie (bis auf Abweichungen, die durch Rundung wegfallen) keine Sprünge.

b) Beim Übergang f1/f2 und f4/f5 hat f ' einen Sprung und f einen Knick. Sonst ist f ' sprungfrei und f ohne Knicke. Zur Nicht- bzw. Differenzierbarkeit von f gehört die Nicht- bzw. Stetigkeit von f '.

7. Weder an den Übergangsstellen f2/f3, f3/f4 noch überhaupt ist f im mathematischen Sinne stetig, da die Steuern in €, also immer in kleinen Sprüngen erhoben werden. Aber für den Zusammenhang hier ist die Steuerfunktion genau genug ohne Sprünge oder quasi-stetig.

Da die x-Werte und auch die f(x)-Werte beide nur diskret vorkommen (in €), kann keine Differenzierbarkeit (für h → 0!) definiert werden. f ist im mathematischen Sinne nicht differenzierbar. Für den Zusammenhang hier ist die Steuerfunktion allerdings genau genug knickfrei (außer an den Übergängen f1/f2 f4/f5). Die Steuerfunktion ist mit der Ausnahme der beiden Stellen quasi-differenzierbar.

**Steuer 2020**

§ 32a Absatz 1 wird wie folgt gefasst:

„(1) Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt ab dem Veranlagungszeitraum 2020 vorbehaltlich der

§§ 32b, 32d, 34, 34a, 34b und 34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 9 408 Euro (Grundfreibetrag): 0;

2. von 9 409 Euro bis 14 532 Euro: (972,87 · y + 1 400) · y;

3. von 14 533 Euro bis 57 051 Euro: (212,02 · z + 2 397) · z + 972,79;

4. von 57 052 Euro bis 270 500 Euro: 0,42 · x – 8 963,74;

5. von 270 501 Euro an: 0,45 · x – 17 078,74.

Die Größe „y“ ist ein Zehntausendstel des den Grundfreibetrag übersteigenden Teils

des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. Die

Größe „z“ ist ein Zehntausendstel des 14 532 Euro übersteigenden Teils des auf ei-

nen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. Die Größe „x“

ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. Der

sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.“

**Steuerfunktion 2020**

|  |  |
| --- | --- |
| Gültigkeitsbereich  0 bis 9408  9409 bis 14 532  14 533 bis 57 051  57 052 bis 270 500  270 501 bis … | Funktionsgleichung  f1(x) = 0  f2(x) = 972,8710- 8 (x – 9408)2 + 0,14(x – 9408)    f3(x) = 212,0210- 8 (x – 14532)2 + 0,2397(x – 14532) + 972,79  f4(x) = 0,42 x – 8 963,74  f5(x) = 0,45 x – 17 078,74 |

x: zu versteuerndes Jahreseinkommen in €; f(x): zu zahlender Steuerbetrag in €

**Grenzsteuerfunktion 2020**

f1‘(x) = 0

f2‘(x) = 2972,8710- 8 (x – 9408) + 0,14

f3‘(x) = 2212,0210- 8 (x – 14532) + 0,2397

f4‘(x) = 0,42

f5‘(x) = 0,45