**Bakterien, Zellen, Pflanzen**

Eine Materialzusammenstellung zu exponentiellem Wachstum bei Bakterien, Zellen und Pflanzen, i.d.R. aus Anlass von Zeitungsberichten

* Bakterienwachstum

Ein einführendes Arbeitsblatt mit Aufgaben vom Schulbuchtyp

* Bakterien-Wachstum

Berechnung der Daten eines Zitates

* Zellteilungen und Tumorerkrankung

Buchzitat und Erkennbarkeit von Tumorzellen

* Killeralgen

Zeitungsberichte mit Berechnungen dazu

* Außer Kontrolle

Zeitungsbericht über die Wasserhyazinthe mit ausführlichem Bezug zu exponentiellem Wachstum; Berechnungen dazu

Bakterienwachstum

1. Unter günstigen Lebensbedingungen teilen sich die Bakterien einer bestimmten Art alle 10 Minuten.

Beschreibe das Wachstum einer Kultur von anfangs 1000 Bakterien in 50 Minuten.

a) Tabelle

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Zeit in min | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| Anzahl in 1000 |  |  |  |  |  |  |

b) Trage die Werte in ein Koordinatensystem ein. Versuche die Punkte durch eine gut passende, elegante Kurve zu verbinden.

c) Wie viele Bakterien werden es nach 5 Minuten sein?

2. Nimm an, die Kultur einer anderen Bakterienart vervierfacht sich in jeweils 30 Minuten.

Stelle dieses Wachstum in einer Tabelle und in einem Koordinatensystem für die ersten 90 Minuten einer Kultur von anfangs 1000 Bakterien dar.

Nach welchem Zeitraum ist solch eine Bakterienkultur 2-mal, 6-mal bzw. 8-mal so groß wie zu Beginn?

Versuche deine Antworten kurz zu begründen.

Bakterien-Wachstum

Einige Bakterien können sich alle 20 Minuten verdoppeln, was exponentielles Wachstum mit erstaunlichen Wachstumsraten ermöglicht, solange die Rohmaterialien ausreichen. Bei hinreichenden Rohstoffreserven könnte ein einziges, ein billionstel Gramm schweres Bakterium in weniger als zwei Tagen eine Population mit einem Gewicht der Erde selbst gründen.

nach: Nick Lane, Leben, Darmstadt 2013, S. 111/112

Info: Gewicht der Erde rund 6 ∙ 1024 kg

1. Prüfe die Angaben im Text.

Tipp: Zähle in 20-Minuten-Einheiten.

2. Berechne die Angabe "in weniger als zwei Tagen" genauer.

Bearbeitung

1. Gewicht des Bakteriums: 1 ∙ 10-12 g

2 Tage = 2 ∙ 24 ∙ 3 ∙ 20 min = 144 ∙ 20 min

Gewicht nach 2 Tagen: G = 1 ∙ 10-12 g ∙ 2144 ≈ 2,23 ∙ 1031 g ≈ 2,2 ∙ 1028 kg

Nach 2 Tagen (oder 144 Zeiteinheiten von 20 Minuten) haben die Bakterien rund 2,2 ∙ 1028 kg erreicht und damit mehr als die Masse der Erde.

Es würden tatsächlich weniger als 2 Tage reichen.

2. 1 ∙ 10-12 g ∙ 2 2n = 6 ∙ 1027 g n: Zahl der 20 Minuten-Takte

2n = 6 ∙ 1039 | log

n ∙ log 2 = log 6 + 39

n ≈ 132,14

Zahl der Stunden:  h ≈ 44 h

Zahl der Tage und Stunden: 1 Tag und 20 h

Schon nach einem Tag und rund 20 h wäre die Erdmasse erreicht.

Genauer: 132,14 20-Minuten-Takte ≈ 44,0467 h ≈ 1 d + 20 h + 0,0467 ∙ 60 min ≈ 1 d + 20 h + 2,8 min

Probe: 1 ∙ 1012 ∙ 23 ∙ (44 + 2,8 : 60) g ≈ 5,999 ∙ 1027 g ≈ 6 ∙ 1024 kg – Passt!

Zellteilungen

Die Entwicklung eines Embryos beginnt mit der Zweiteilung einer einzelnen Zelle des befruchteten Eies; aus den zwei Zellen werden durch Teilung vier, aus den vier werden acht und so weiter. Nur wenige Dutzend Zellgenerationen sind notwendig, und schon geht die Zahl der Zellen in die Billionen – so wirksam ist exponentielle Vermehrung.

Aber wenn das alles wäre, würden die Billionen Zellen einander genau gleichen.

Richard Dawkins, Und es entsprang ein Fluß in Eden. Das Uhrwerk der Evolution, München1995 Seiten 36/37

Tumorerkrankungen

Genetische Disposition zu Tumorerkrankungen

Bevor ein Tumor mit bildgebenden Verfahren klinisch diagnostizierbar wird, hat die Ursprungszelle etwa 20 bis 25 Verdopplungen durchlaufen.

E. Schwinger, J.W. Dudenhausen: Molekulare Medizin und Genetische Beratung: Die Medizinische Verlagsgesellschaft Umwelt und Medizin mbH - Frankfurt/Main 1999

Wie viele Zellen machen einen Tumor so groß, dass er sichtbar ist?

Lösungen

zu Zellteilungen

2x = 1012

x ≈ 39,9 ≈ 40

Gut 3 Dutzend.

zu Tumorerkrankungen

220 = 1 048 578

225 = 33 554 432

Erst bei 1 bis 30 Millionen Zellen ist ein Tumor bildlich erkennbar.

Killeralgen

**Killeralge erstickt das Mittelmeer**

Marseille. Sie ist für den Menschen ungefährlich, droht aber das gesamte Ökosystem des Mittelmeeres zu zerstören. Zu diesem Ergebnis sind Wissenschaftler nach mehrmonatigen eingehenden Beobachtungen der tropischen Killeralge "Caulerpa Taxifolia" gelangt, die entlang der französischen Küsten "mosaikartig" die heimischen Algenarten überwuchert und unter ihrem Wedel gnadenlos alles andere Leben ersticken lässt. Der 1984 erstmals vor dem Ozeanographischen Museum in Monaco entdeckte Eindringling vermehrt sich exponentiell. Rund 400 Hektar des schmalen mediterranen Festlandsockels hat er bereits kolonisiert. Italien, Spanien und die Balearen sind inzwischen berührt, heißt es in dem Ende Oktober vorgelegten alarmierenden Bericht des Expertenkomitees.

Wie weit wird sich die tropische Wucheralge noch ausbreiten, die derzeit keinen natürlichen Feind im Mittelmeer besitzt? Von Roquebrune bei Monaco hat sich der grüne Teppich seit 1984 "jedes Jahr versechsfacht", betont Professor Meinesz vom Institut für Küstenumweltschutz der Universität Nizza.

Döbelner Allgemeine Zeitung vom 3.11.1992 (WT)

**Immer mehr Killeralgen**

**Rom** – Die erstmals 1984 im Mittelmeer entdeckte "Killeralge" bedroht zunehmend italienische Küsten. Sie hat sich bereits auf einer Fläche von über 10 000 Hektar ausgebreitet, führt zu Sauerstoffmangel und dadurch zum Absterben von Pflanzen und Fischen.

Bild vom 05.08.1997

**Aufgabe 1:** Der erste Zeitungsartikel erschien im November 1992. Wie groß war bei ihrer Entdeckung im Jahr 1984 die von der Caulerpa Taxifolia überwucherte Fläche des küstennahen Mittelmeeres, wenn man die Aussage von Professor Meinesz zurückrechnet?

**Aufgabe 2:** Die Fläche des Mittelmeeres beträgt rund 3,02 Millionen Quadratkilometer. Betrachte als Ausgangslage das Jahr 1992: In welchem Jahr würde die "Killeralge" bei fortgesetzter jährlicher Versechsfachung der Fläche die gesamte Oberfläche des Mittelmeeres bedecken?

**Aufgabe 3:** Der zweite Zeitungsartikel erschien im August 1997.

Wie groß wäre die von der "Killeralge" bedeckte Fläche bei Erscheinen des zweiten Artikels gewesen, wenn das Wachstum wie zwischen den Jahren 1984 und 1992 weiter angehalten hätte?

Berechne die durchschnittliche jährliche prozentuale Zunahme des "Algenteppichs" zwischen den Jahren 1984 bis 1992!

Wie groß war die durchschnittliche jährliche prozentuale Zunahme des Teppichs in der Zeit zwischen dem Erscheinen der beiden Artikel?

In welchem Jahr würde die "Killeralge" die gesamte Oberfläche des Mittelmeeres bedecken, wenn sich das Wachstum gemäß Aufgabe 3c weiter fortsetzt?

Lösungen

**Aufgabe 1:** Es sei *At* die Fläche des im Jahr *t* bedeckten Teils des Mittelmeeres. Dann gilt



und es folgt



Diese Fläche ist wohl zu klein, als dass damals jemand davon derart Notiz genommen hätte. Allerdings würde ein nur etwas kleinerer Wachstumsfaktor wie z. B. 5,5 bereits



liefern, also schon den doppelten Wert.

**Aufgabe 2:** Für das Jahr, in dem die Alge unter der genannten Voraussetzung das gesamte Mittelmeer bedeckt, gilt entsprechend



Nach *x* aufgelöst ergibt sich



Etwa 7½ Jahre nach dem November 1992 – also im Jahr 2000 – würde die Alge das gesamte Mittelmeer bedecken. Tatsächlich dürfte das Wachstum nicht wirklich weiterhin exponentiell verlaufen, da die Alge ja vorwiegend auf die Küstenregionen beschränkt ist und nicht überall gleich gute Wachstumsbedingungen vorliegen werden.

**Aufgabe 3:**

a) Zwischen dem Erscheinen der beiden Zeitungsartikel sind vier Jahre und neun Monate – also 4,75 Jahre – vergangen. Die "Killeralge" hätte bei unverändertem Wachstum eine Fläche von



bedeckt.

b) Im Zeitraum von 1984 bis 1992 versechsfachte sich nach den Angaben des ersten Zeitungsartikels die Fläche des "Algenteppichs" jährlich. Dies entspricht einer jährlichen Zunahme um 500 Prozent.

c) Für den Zeitraum zwischen November 1992 und August 1997 gilt:

.

Aufgelöst nach *x* ergibt sich



das heißt, die durchschnittliche prozentuale jährliche Zunahme lag bei rund 100 Prozent. Das durchschnittliche Wachstum der von der Alge bedeckten Fläche hat sich also nach 1992 deutlich abgeschwächt.

d) Analog zu Aufgabe 2 gilt hier



Nach *x* aufgelöst ergibt sich



Etwa 15 Jahre nach 1997 – also im Jahr 2012 – würde die Alge, wenn die derzeitige jährliche Verdoppelung weiter anhielte, das gesamte Mittelmeer bedecken.

Außer Kontrolle

VON ALBRECHT BEUTELSPACHER

|  |  |
| --- | --- |
| Nehmen Sie eine Doppelseite der Frankfurter Rundschau. Breiten Sie diese zunächst aus und falten Sie diese dann so, dass Sie wieder eine einfache Seite erhalten. Diese können Sie weiter falten, sodass ein Papier halber Größe entsteht. Diesen Vorgang können Sie wiederholen: immer so, dass sich ein Format halber Größe ergibt. Auf diese Weise wird die Zeitung nicht nur immer kleiner, sondern auch immer dicker. "Na", werden Sie sagen, "richtig dick wird sie nicht, das sind ja nur ein paar Lagen Papier." Überlegen wir uns, was passiert: Nach einmaligem Falten haben wir zwei Lagen, nach dem zweiten Falten das Doppelte, also vier Lagen, nach dem dritten Falten acht Lagen, und so weiter: Bei jedem Faltvorgang verdoppelt sich die Anzahl der Papierlagen. Das bedeutet, dass nach sechsmaligem Falten schon 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 64 Lagen aufeinander liegen, und nach zehnmaligem Falten schon 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 1024. | Viktoria Hya  Schön, aber gefährlich: Der Viktoriasee wird von der Wasserhyazinthe überwuchert. |

Hier stellen Mathematiker eine Frage, die scheinbar völlig jenseits der Realität ist, nämlich: Wie oft müssten wir falten, damit die Zeitung so dick ist, dass sie bis zum Mond reicht? Natürlich funktioniert das in der Praxis nicht. Denn der Mond ist etwa 350 000 Kilometer weit entfernt. Vor dem letzten Faltvorgang wäre der Papierstapel schon 175 000 Kilometer hoch, man müsste den Stapel knicken und umfalten, und dann wäre man da. Also: Real geht es nicht. Aber fragen kann man ja. Und interessanterweise hat diese Frage eine völlig überraschende Antwort: Man muss nur 42-mal falten, um mit der Zeitung bis zum Mond zu kommen! Und zwar nicht, weil 42 die Antwort auf alle Fragen ist, sondern weil man es ausrechnen kann: Die Zwei wird 42-mal mit sich selbst multipliziert, das Ganze mit der Dicke des Zeitungspapiers multipliziert, und man erhält eine Strecke von fast 440 000 Kilometern. Unglaublich!

Mathematiker nennen die Funktion, deren Werte sich bei jedem Schritt verdoppeln, eine Exponentialfunktion. Diese Funktion ist extrem wichtig, aber für uns Menschen extrem schwer zu verstehen. Nicht mathematisch, das ist einfach. Aber ihre Dynamik können wir kaum erfassen.

Sie kennen vielleicht die Geschichte vom Erfinder des Schachspiels, der von seinem Herrscher einen Wunsch frei hatte. Er wünschte sich auf das erste Feld des Schachbretts ein Reiskorn, auf das zweite zwei, dann vier, dann acht und so weiter, jeweils das Doppelte. Das hört sich nach nichts an, wir sind aber schon gewarnt: Insgesamt würde eine Menge Reis benötigt, die die gesamte Weltreisernte um ein Vielfaches übersteigt! Es gibt aber nicht nur lustige Geschichten zur Exponentialfunktion. Das liegt daran, dass viele natürliche Vorgänge Exponentialfunktionen sind. Und wehe, wenn diese außer Kontrolle geraten!

Der Viktoriasee ist der größte See der Welt - er würde fast ganz Bayern unter Wasser setzen. Zu Schiff lässt er sich bald nicht mehr befahren, denn er wächst zurzeit zu. Die Wasserhyazinthe, eine wunderschön blassviolett blühende Pflanze, überwuchert ihn.

Zum ersten Mal wurde das liebliche Monster 1988 am Viktoriasee gesichtet. Die Eichhornia crassipes vermehrt sich mit unerbittlicher Geschwindigkeit. Bei optimaler Temperatur, zwischen 25 und 27,5 Grad, verdoppelt sich die überwachsene Seefläche innerhalb von bis zu 15 Tagen. Der Viktoriasee wächst bei besonders günstigen Verhältnissen um bis zu 2000 Hektar pro Woche zu.

Die Folgen sind dramatisch: Der dicke Teppich der Wasserhyazinthe zerstört die Ufer, überwuchert Strände und blockiert die Häfen. Durch sie gelangt kein Sauerstoff mehr ins Wasser, sodass die Fische verenden. Dafür wimmelt es von Schnecken, Moskitos und Schlangen. Wenn nicht schnell etwas geschieht, droht der Kollaps.

Vor einigen Jahren tauchten Rüsselkäfer auf, die die Wasserhyazinthe auffraßen, mit dem Effekt, dass sich die mit Wasserhyazinthen bedeckte Fläche innerhalb von fünf Jahren auf ein Zehntel verminderte. Aber inzwischen nimmt die Wasserhyazinthe wieder zu – und zwar exponentiell!

Frankfurter Rundschau, 10.11.2008

1. Erläutere im Artikel erwähnte Kennzeichen exponentiellen Wachstums.

2. Notiere für alle vorkommenden Beispiele eine passende Funktionsvorschrift.

3. Für welchen Flächenbestand der Wasserhyazinthe gilt die Angabe zur Flächenzunahme im Text?

4. Skizziere einen Grafen für die durch die Wasserhyazinthe bedeckte Fläche seit 1988 (s. Text).

Bearbeitung

1. Exponentialfunktionen verdoppeln sich bei jedem Schritt.

Oder: Exponentialfunktionen haben eine konstante Verdopplungszeit.

2. a) Papierstapeldicke:

b · 242 = 440 000 km = 4,4 · 108 m

b ≈ 1 · 10-4 m = 0,1 mm

d(n) ≈ 0,1 · 10-6 · 2n

mit d: Dicke des Stapel in km; n = Zahl der Faltungen

b) Schachbrett

r(n) = 1 · 2n

mit r: Zahl der Reiskörner; n: Nummer des Schachbrettfeldes

c) Wasserhyazinthe

b · a15 = 2 b

a ≈ 1,047

w(t) = 1 · 1,047t

mit w: Fläche, die durch Wasserhyazinthen bedeckt ist; t: Zeit in Tagen seit 1988

Die 1 steht hier für die Fläche, die eine Wasserhyazinthe bedeckt.

3. Ansatz I (linear):

2000 ha pro Woche ≈ 286 ha pro Tag

b · 0,047 ≈ 286

b ≈ 6085

Ansatz II (exponentiell):

b · 1,0477 = b + 2000

0,379 · b = 2000

b ≈ 5277

Wenn schon 5300 ha bedeckt sind, wird die Fläche unter optimalen Bedingungen (15 Tag Verdopplungszeit bzw. 4,7 % Zunahme am Tag) um weitere 2000 ha zunehmen.

4.

