**WG-01-41**

**Differenzialgleichungen**

**Wachstumstypen**

**Inhalt Seite[[1]](#footnote-1)**

Differenzialgleichungen der Form f' = a · f 1

Herleitung der Lösung 1

Zusatz A, B: Verdoppelungszeit und Faustregel 2

Wertverlust von Autos 3

Bauchspeicheldrüse 4

Altersbestimmung 5

Cäsium 8

Differenzialgleichungen der Form f' = a · f + b 10

Herleitung der Lösung 10

Kabelfernsehen 11

Tropfinfusion 12

Von Fischen und Menschen 13

Differenzialgleichungen der Form f' = a · f² 15

Differenzialgleichungen der Form f' = a f² + b f 16

Herleitung der Lösung 16

Baggern, begradigen, betonieren 17

2 Aufgaben zur Übung I 19

Zusatz A: Die Trendwende 21

Zusatz B: Funktionswert bei der Trendwende 22

Zusatz C: Umformulierung der Lösung 23

Stromprognose 24

Roboter 26

Kanadas Eisenbahn 28

Neun Milliarden Menschen in 2075 30

2 Aufgaben zur Übung II 31

Lebenszeit 33

Beispiele für Differenzialgleichungen in der Physik und Rückführung auf die Fälle oben 36

Klausuraufgaben 39

Eine Population 39

Ein Land erstickt an Menschen 44

Oil and gas discoveries 47

Mobilfunknutzer in China 50

Entwicklung der Weltbevölkerungszahl 52

Energiewende 56

# Differenzialgleichungen der Form f' = a · f

Herleitung der Lösung

**– Formale Übung**





**– Wachstum:**

a) Eine Größe hat ein Wachstumsverhalten mit konstantem Prozentsatz p.

Anfangswert f(0)

Wachstumsfaktor: w = 1 + 



f ' = In w · f

b) Die relative Wachstumsrate ist konstant:  = ln w

Die Zunahme ist proportional zur vorhandenen Größe. Man nennt das ungehindertes Wachstum.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **–** | **Zusammenfassung:** | k = f(0)  a = ln w  w = ea |

Übungen zu beidem und zur beidseitigen "Übersetzung" siehe UE WG-01-01

|  |  |
| --- | --- |
| – **Verlauf der Graphen**  a) p > 0 ⇒ w > 1 ⇒ a > 0 ⇒ f ' > 0  ⇒ f wächst ⇒ f ' wächst |  |
| b)p < 0 ⇒ w < 1 ⇒ a < 0 ⇒ f '< 0  ⇒ f fällt ⇒ |f '| fällt |  |

Zusatz A, B: Verdoppelungszeit und Faustregel

**Zusatz A:** Für die Verdoppelungszeit D gilt:





**Zusatz B:**

|  |  |
| --- | --- |
| D · ln  = ln 2  Für kleine p (p < 10) gilt:  D ·  ≈ 0,70 |  |

Für x nahe bei 1 gilt: In (1 + z) ≈ z, da dort der In die Steigung 1 hat.

Wertverlust von Autos

Jedermann weiß, dass der Wertverlust eines Neuwagens im ersten Jahr am größten ist und in den Folgejahren zunehmend geringer wird. Der Autohandel geht (bei einem bestimmten Fahrzeugtyp und einer durchschnittlichen Fahrzeugleistung) davon aus, dass der jährliche Wertverlust bei 18 % liegt. – Notiere eine passende Differenzialgleichung und Funktion.

a) Wie viel ist das Auto beim Neupreis von 34 000 DM nach 6 Jahren noch wert?

b) Nach wie viel Jahren ist das Auto nur noch die Hälfte wert?

c) Ein Händler kauft nach der Faustregel, dass sich der Wert eines Autos in 3 Jahren halbiert. Von welcher prozentualen Wertminderung geht er aus?

d) Nach wie viel Jahren hat ein Auto nach der Faustregel in c nur noch Schrottwert (700 DM) bei einem Neupreis von 34.000 DM?

p % = - 18 % ⇒ w = 0, 82

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Differentialgleichung  f ' ≈ a · f mit a ≈ ln w  f ' = - 0,198 · f |  | Funktion:  f(x) = f(0) · wx  f(x) = 34 000 · 0,82x | oder  f(x) = f(0) · ea x  f(x) = 34 000 · e-0,198 x | |
|  |  |  |  |  | |
| a) | f(x) = 34 000 · 0,82x  f(6) = 10 336,23 | b) |  | |  |
|  |  |  |  | |  |
| c) |  |  | **c) Alternative nach Zusatz A:**  Die Verdoppelungszeit heißt hier Halbwertszeit; die 2 in der Herleitung ist durch ½ = 0,5 zu ersetzen: | | |
|  |  |  |
| d) | f(xs) = 34 000 · 0,974xs ≈ 700  ⇒ xs ≈ 16,8 |  |

Bauchspeicheldrüse

Um die Funktion einer Bauchspeicheldrüse zu untersuchen, wird ein bestimmter Farbstoff injiziert und gemessen, wie er ausgeschieden wird. Man weiß, dass eine gesunde Bauchspeicheldrüse pro min etwa 4 % der jeweils vorhandenen Farbstoffmenge ausscheidet.

a) Notiere eine Differenzialgleichung und eine Funktion für die im Körper verbleibende Farbstoffmenge.

b) Einem Patienten werden 0,3 g des Farbstoffes gespritzt; nach 20 min sind 0,1 g ausgeschieden. Arbeitet die Bauchspeicheldrüse normal?

c) Wie viel Farbstoff scheidet die untersuchte Bauchspeicheldrüse in den ersten 10 min aus?

Lösungen

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a) | p % = - 4 % ⇒ w = 0,96 | | | a | = In w | | |
|  | f (x) = f(0) · 0,96x | | |  | ≈ -0,041 | | |
|  |  | | | f' | = -0,041 · f | | |
| b) | f(0) = 0,3 | | |  |  | | |
|  | Also: f(x) = 0,3 · 0,96x | | |  |  | | |
|  | Normal nach 20 min wäre für die verbleibende Farbstoffmenge: | | | | | | |
|  | f(20) | | = 0,3 · 0,9620  ≈ 0,133 | oder | | f(20) | = 0,3 · w20 = 0,2  ⇒ w = 0,98 und p ≈ -2 |
|  | Ausgeschieden müssten also 0,3 - 0,133 = 0,167 g sein.  Da nur 0,1 g ausgeschieden wurden, arbeitet die Bauchspeicheldrüse nicht normal.  Oder: Es müssten 4 % pro Minute ausgeschieden werden. Es werden aber nur 2 % ausgeschieden pro Minute. | | | | | | |
| c) | I: | w ist für den angegebenen Fall neu zu ermitteln: | | | | | |
|  |  | f(x) = 0,3 · wx | | |  | | |
|  |  | f(20) = 0,2 | | | (aus Aufgabe b die verbliebene Farbstoffmenge) | | |
|  |  | 0,2 = 0,3 · w20 | | |  | | |
|  |  | w ≈ 0,980 und p % = -2,0 % | | |  | | |
|  |  | Also:  f(x) ≈ 0,3 · 0,98x | | | (s. b. die "Oder"-Rechnung) | | |
|  | II: | f(10) = 0,3 · 0,9810 | | |  | | |
|  |  | = 0,245 | | |  | | |
|  |  | Es werden rund 0,055 g in den ersten 10 min ausgeschieden. | | | | | |

Altersbestimmung

Kirche bestätigt Fälschung des Grabtuchs: >**Reliquie bleibt heilig**<.

Turiner Erzbischof unterstreicht Symbol-Wert

|  |  |
| --- | --- |
| Turin (AP) – Nun hat auch die Kirche offiziell bestätigt, dass das seit 400 Jahren verehrte Turiner Grabtuch eine Fälschung ist. Das Leinen, in das Jesus nach der Überlieferung bei seiner Kreuzabnahme gehüllt worden sei, kann nicht älter als 728 Jahre sein.  Darin sind sich Wissenschaftler aus Zürich, Oxford und Arizona "zu 95 Prozent" sicher. Wie das lebensgroße Abbild eines Gekreuzigten allerdings auf den Stoff gelangt ist, bleibt den Forschern weiter ein Rätsel.  Dem Bischof von Turin, Anastasio Kardinal Ballestrero, ist trotz dieses Befundes das Leintuch nicht weniger heilig: "Die Kirche glaubt an das Bildnis, nicht an die Geschichte, weil dieses Bild tatsächlich interessant ist und weil die Menschen zutiefst an Jesu glauben", erklärte er bei der Veröffentlichung der Untersuchungen. | Er verwies auf den symbolischen Wert des Abbildes auf dem Tuch, das eine "Offenbarung des Antlitzes Christi" sei. Die neue Datierung des Turiner Grabtuchs könnte Auswirkungen auf zahlreiche andere heilige Gegenstände haben, deren Herkunft zweifelhaft ist.  Im April hatte der Vatikan erstmals genehmigt, Stoffproben aus dem 1,10 mal 4,36 Meter großen Grabtuch zu entnehmen, die in verschiedenen Laboratorien mit der sogenannten "Radiokarbonmethode" untersucht wurden. Dabei messen die Forscher den radioaktiven Zerfall des seltenen Kohlenstoffisotops C14 und errechnen so das Alter des Gegenstands. Wie hat Papst Johannes Paul II. auf das Testergebnis reagiert? Der Turiner Erzbischof zitierte ihn mit den Worten: "Veröffentlichen Sie es." |
| aus: FN, 17.01.1988 | |

**Altersbestimmung mit der C14-Methode**

Organische Substanz (z. B. Holz) enthält Kohlenstoff, auch das radioaktive Isotop C14. Dieses zerfällt mit einer Halbwertszeit von 5760 Jahren (d. h. nach der Zeit ist nur noch die Hälfte der Ausgangsmasse vorhanden). Da lebendes Holz immer wieder neu Kohlenstoff aufnimmt, stellt sich ein Gleichgewicht her zwischen Zerfällen und Neuaufnahme. Das bedeutet für lebendes Holz, dass es zu konstant 6,68 Zerfällen pro Minute und pro Gramm kommt.

Stirbt Holz ab, so wird kein (u. a. radioaktiver) Kohlenstoff mehr aufgenommen und die vorhandene Menge C14 zerfällt langsam. Damit nehmen aber auch fortlaufend die Zerfallsraten ab, denn für radioaktive Zerfälle gilt, dass die Zerfallsrate proportional der noch vorhandenen radioaktiven Masse ist.

Durch Messung der Zerfallsrate im Holz schließt man auf den Anteil des noch vorhandenen C14 im Kohlenstoff des Baumes und damit auf die Zeit seit dem Absterben des Baumes.

1. Notiere eine passende Differenzialgleichung für die Zahl N der noch vorhandenen Atome und ihrer Zerfallsgeschwindigkeit N*'*. Löse sie.

2. Stelle einen Zusammenhang her zwischen dem nicht bekannten Proportionalitätsfaktor und der i. d. R. angegebenen Halbwertszeit.

3. Notiere insgesamt die Funktionsgleichung.

Lösungen: Altersbestimmung

1. Analog zur formalen Übung ① mit negativem a.

Notiere die Proportionalitätskonstante als – c (mit c > 0).



2. Zur c-Bestimmung:

Gemäß Zusatz A zu ① muss hier von Halbwertszeit H statt von Verdoppelungszeit geredet werden und der Faktor 2 ist durch 0,5 zu ersetzen:



3.  Und damit: 

Weitere Aufgaben zur Altersbestimmung

A) Bei der 1950 durchgeführten Ausgrabung der babylonischen Stadt Nippur ergab die Messung von 14C in einem hölzernen Dachbalken 4,09 Zerfälle pro Minute und pro Gramm.

B) Holzkohle aus der Zeit, in der die berühmte Lascaux-Höhle in Frankreich bewohnt war, hatte im Jahre 1950 eine durchschnittliche Zerfallsrate von 0,97 Zerfallsakten pro Minute und pro Gramm.

C) Unter der Annahme der oben angegebenen Zerfallsrate lebenden Holzes bestimme die gemessene Zerfallsrate, die auf das Alter des Grabtuches oben schließen lässt.

D) Im Grab des Pharaonen Sesostris III. wurde Holzschliff gefunden mit einer Reststrahlung von 63,1 %. Das Alter?

E) Wie viel Prozent Reststrahlung hat noch ein 1000 Jahre alter Balken?

Hinweis

Da die Zahl der Zerfälle Z(t) proportional zur Zahl der Teilchen N(t) ist, kann man direkt mit den Zerfallsangaben rechnen:

Z(t) = Z(0) · . Für die 14C-Methode gilt der Zusammenhang , wobei Z(t) die Zerfälle pro Minute pro Gramm angibt und t in Jahren seit Absterben des Stoffes gemessen wird.

Lösungen: Weitere Aufgaben zur Altersbestimmung

A) Die Zahl der Zerfälle pro Minute und Gramm ist proportional zur vorhandenen Teilchenzahl N. D. h. in der Funktionsgleichung steht die Proportionalitätskonstante sowohl vor N(t) als auch vor N(0). Sie lässt sich kürzen und man erhält die analoge Gleichung für die Zerfälle:

Z(t) = Z(0) ·  Z(t) = 4,09

4,09 = 6,68 ·  Z(0) = 6,68

t ≈ 4077 H = 5760

t = ?

4077 Jahre vor 1950, also im Jahre -2127, ist der Baum gefällt worden, aus dem der hölzerne Dachbalken hergestellt wurde.

B) 0,97 ≈ 6,68 · 

t ≈ 16 035

Die Lascaux-Höhle war vor rund 16 035 Jahren (-14 000) bewohnt.

C) Z(728) ≈ 6,68 · 

t ≈ 6,12

Es wurden 6,12 Zerfälle pro Minute und Gramm gemessen

D)  = 0,631 ≈  ⇒ t ≈ 3826

E)  ≈ 0,887 = 88,7 %

Cäsium

Fehler im Schulbuch

**Tausend Jahre wie ein Tag**

Bayerische Kinder rechnen mit einer verkürzten Cäsium-Halbwertzeit

München

Johannes Glötzner ist ein gewissenhafter Pädagoge. Wenn der Mathematiklehrer an seinem Münchner Gymnasium eine Hausaufgabe stellt, so rechnet er diese selbst noch einmal durch. Man weiß ja nie. Vor einiger Zeit stellte er seiner zehnten Klasse folgende Aufgabe: "Das Element Cäsium (Cs 137) zerfällt mit einer Halbwertzeit von 9,7 Tagen. Wie viel Prozent einer ursprünglichen Anzahl von Atomen sind nach 1 Woche, einem Monat (30 d), einem halben Jahr, einem Jahr noch vorhanden?" Diese Aufgabe hatte er einem Algebra-Buch vom Bayerischen Schulbuch-Verlag ("Schmitt-Wohlfahrt, Ausgabe G Buch 10") entnommen.

Für Rechenfüchse war es eine einfache Übung. Doch Glötzner stutzte am heimischen Schreibtisch: "Das kommt mir komisch vor", sagte er und schrieb dann einen Brief an den Bayerischen Schulbuch-Verlag: "Wie spätestens seit der Tschernobyl-Katastrophe einem Großteil der Bevölkerung bekannt sein dürfte, beträgt die Halbwertzeit für Cs137 30 Jahre und nicht wie (irrtümlich?) angegeben, 9,7 Tage!"

"Vor Gott sind tausend Jahre wie ein Tag!" schrieb die Bürgerrechtsgruppe Humanistische Union spöttisch an den Verlag. "Die Aufgabe klingt beruhigend – und das soll sie wohl auch!?" Während im Rechenbuch unterstellt werde, dass nach einem Jahr nur noch schlappe \_\_\_\_ Prozent der gefährlichen Atome übrig seien, so strahlten doch im richtigen Leben noch üppige \_\_\_\_ Prozent. Oder andersherum: "Der nach Ihren Angaben zu berechnende atomare Zerfall einer Woche dauert in Wirklichkeit \_\_\_\_\_\_\_\_." "Das ist doch ein kleiner Unterschied", stellte Lehrer Glötzner fest und befürchtete eine Verharmlosung der Tschernobyl-Folgen.

Der Bayerische Schulbuch-Verlag gelobte eilig Besserung: "Das wird in der nächsten Ausgabe korrigiert", tat er kund. Nicht sagen konnte der Verlag jedoch, wann die herauskommt: "Vielleicht in einem Jahr oder so was." Per Rundschreiben die Gymnasien auf den fehlerhaften Sachverhalt aufmerksam zu machen, hält man für übertrieben: "Der Aufwand wäre viel zu groß." Wie viele bayerische Pennäler die Aufgabe mit der falschen Halbwertzeit rechnen müssen, ist unbekannt. Der Schulbuchverlag will nichts über die Auflage des Mathe-Schmökers preisgeben.

Im Kultusministerium sieht man die Sache gelassen: "Können Sie mir ein Buch nennen, wo nicht irgendein Fehler drin ist?" fragt der zuständige Fachreferent für Mathematik und zieht das Fazit: "Das bleibt da jetzt so drin."

Wozu auch die ganze Aufregung: Hat doch das Bayerische Umweltministerium erst kürzlich Entwarnung für den vom Tschernobyl-Fallout besonders gebeutelten Freistaat gegeben: "Vier Jahre nach dem Reaktorunfall ist in Bayern die zusätzliche äußere Strahlenexposition durch am Boden abgelagerte radioaktive Stoffe mit üblichen Messgeräten nicht mehr nachweisbar."

Hans-Ulrich Stoldt

1. Mache es wie die Rechenfüchse. Bestimme entsprechend den Schulbuchangaben, wie viel Prozent einer ursprünglichen Anzahl von Atomen nach

a) einer Woche

b) einem Monat

c) einem halben Jahr

d) einem Jahr

noch vorhanden sind

2. Was hat die Humanistische Union geschrieben? Was hat in den Lücken des Zeit-Artikels gestanden?

Lösungen: Cäsium

N(t) = N(0) ·  [siehe Aufgabe zur14 C-Methode]

t in Tagen; HCäsium  = 9,7

1. Gesucht ist jeweils .

a)  ≈ 0,9317 ≈ 60,6 %

b)  ≈ 0,93130 ≈ 11,7 %

c)  ≈ 0,931183 ≈ 2,98 · 10-6

d)  = 0,931365 ≈ 4,64 · 10-12

2. a) 4,6 · 10-12 = 4,6 · 10-10 % = 0,00000000046 %

b) t in Jahren; HCäsium = 30

 ≈ 0,977 ≈ 9,97 %

c) Die Berechnung in 1a liefert nach einer Woche 60,6 %. Tatsächlich ergibt sich:

 ⇒ t ≈ 21,7

Es dauert rund 21½ Jahre, bis die Strahlung auf 60,6 % des Ausgangswertes gefallen ist.

Zur Kontrolle:

"Vor Gott sind tausend Jahre wie ein Tag!" schrieb die Bürgerrechtsgruppe Humanistische Union spöttisch an den Verlag. "Die Aufgabe klingt beruhigend – und soll sie wohl auch?" Während im Rechenbuch unterstellt wurde, dass nach einem Jahr nur noch schlappe 0,000 000 000 46 Prozent der gefährlichen Atome übrig seien, so strahlten doch im richtigen Leben noch üppige 97,7 Prozent. Oder andersherum: "Der nach Ihren Angaben zu berechnende atomare Zerfall einer Woche dauert in Wirklichkeit 21½ Jahre". "Das ist doch eine kleiner Unterschied", stellte Glötzner fest und befürchtete eine Verharmlosung der Tschernobyl-Folgen.

# Differenzialgleichungen der Form f' = a · f + b

Herleitung der Lösung

**Formale Übung:**

f ' = a · f + b a ≠ 0

f ' = a(f + )

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Substituiere: | g = f +  g' = f' |  |
| Rückübersetzt: | k = f(0) + , also f(x) = (f(0) + ) · ea x - | |

**Wachstum:**

Eine Größe wächst proportional zum verbleibenden "Restraum": f' = r · (G - f) mit der Proportionalitätskonstanten r und der Grenze G. G - f ist der jeweilige "Restraum"; genannt wird es **gebremstes Wachstum**.

**Zusammen:**



|  |  |
| --- | --- |
| **Verlauf des Graphen:**  r sei positiv  1. Die Grenze ist nicht erreicht:  G > f ⇒ f ' > 0 ⇒ f wächst ⇒ G – f wird kleiner  ⇒ f' wird kleiner ⇒ f wächst langsamer ⇒ ...  2. Die Grenze ist überschritten:  f > G ⇒ f' < 0 ⇒ f fällt ⇒ |G – f| wird kleiner ⇒  f' nähert sich 0 (f ' < 0) ⇒ f fällt langsamer ⇒ ... |  |

Kabelfernsehen

Im Jahre 1986 gab es in Baden-Württemberg 3,75 Mio. Haushalte. Davon waren 0,85 Mio. an das Kabelfernsehen anschließbar. Inzwischen wurde das Kabelnetz durch die Bundespost so erweitert, dass 1990 die Hälfte aller Haushalte anschließbar waren.

Bei der Frage, wie die Zahl f(t) (t: Jahre seit 1986) der anschließbaren Haushalte zunimmt, ist zu berücksichtigen, dass die Verkabelung zunehmend schwieriger wird (Verkabelung auf dem flachen Lande, desinteressierte Adressaten) und bei 3,75 Mio. eine Schranke hat. Es ist daher sinnvoll anzunehmen, dass die momentane Zuwachsrate zum Sättigungsmanko proportional ist.

a) Wie lautet die passende Differenzialgleichung und ihre Lösung?

b) Die Verkabelungsaktion des Bundespost kann als beendet gelten, wenn 95 % aller Haushalte anschließbar sind. Wann wird dies der Fall sein?

Lösungen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a) | f ' = r(3,75 - f)  f(x) = k · e-rx + 3,75 | [f-Angaben in Mio. Haushalten  die anschließbar sind; x ab 1986] |
|  | Gegeben sind die Werte für 1986 und 1990 | k = f(0) - G |
|  | f(0) = 0,85 ⇒ k = -2,9  f(4) =  ⇒ r = 0,109 | f(x) = -2,9 · e-0,109 x + 3,75 |
| b) | f(x95) = -2,9 · + 3,75 = 0,95 · 3,75  x95 ≈ 25 |  |
|  | 1986 + 25 = 2011  Im Jahre 2011 ist es soweit bei dieser Modellbildung. | |

Tropfinfusion

In einer Klinik wird einem Patienten durch eine Tropfinfusion ein (bis dahin im Körper nicht vorhandenes) Medikament verabreicht. Dabei gelangt je min eine gleichbleibende Menge von 5 mg des Medikamentes ins Blut. Das dort angereicherte Medikament wird über die Nieren wieder ausgeschieden; die Ausscheidungsrate je min beträgt 5 % der jeweils im Blut gerade vorhandenen Menge des Medikamentes.

a) Untersuche, wie sich der "Medikamentenspiegel" M(t) (in mg) ändert.

Bemerkung: Durch die Tropfinfusion kann also erreicht werden, dass – trotz exponentieller Ausscheidung – im Blut ein etwa gleichbleibender Medikamentenspiegel vorhanden ist. Das ist für die Wirkung gewisser Medikamente entscheidend und kann durch eine Spritze oder durch Tabletten nicht erreicht werden.

b) Wann sind 95 % des Endwertes erreicht?

Ab da gilt der Endwert als hinreichend gut erreicht.

c) Über den Zulauf am Tropf kann der Medikamentenspiegel reguliert werden.

Das ist wichtig, weil manche Medikamente nur bei einem ganz bestimmten Spiegel im Blut optimal wirken. Wie muss der Zulauf eingestellt werden, wenn langfristig im Blut 150 mg des Medikaments vorhanden sein soll?

Lösungen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a) | f ' = 5 - 0,05 f  = 0,05 (100 – f) ⇒ r = 0,05  G = 100  f(x) = k · e-0,05x + 100  k-Bestimmung: Die Tropfinfusion beginne bei x = 0 und mit 0:  f(0) = 0 = k + 100  k = -100  Also:  f(x) = - 100 · e-0,05 x + 100 | |
| b) | Da G = 100 (s. a), folgt:  - 100 · e-0,05 x + 100 = 95  e-0,05 x = 0,05  -0,05 x ≈ -2,996  x ≈ 59,9  Nach etwa einer Stunde sind 95 % des Endwertes erreicht. | |
| c) | Der Zulauf betrage z.  f ' = z - 0,05 f  = 0,05 (20 z - f) ⇒ r = 0,05 und G = 20 z  Da G = 150 verlangt ist, folgt  20 z = 150  z = 7,5  Der Zulauf muss so geregelt werden,  dass 7,5 mg pro min zugeführt wird. | Oder:  G = -  mit a = - 0,05, G = 150  also: b = 7,5 |

Von Fischen und Menschen

– ein Beispiel für beschränktes Wachstum

Forellenwachstum

|  |  |
| --- | --- |
| In einer Forellenzucht wurden bei gleichaltrigen Forellen die jeweils nach t Monaten erreichte durchschnittliche Länge f(t) ermittelt. Ausgewachsene Forellen erreichten nach rund zwei Jahren eine mittlere Höchstlänge von 25 cm. Die Werte der ersten 10 Monate finden sich in der folgenden Tabelle. |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Alter (in Monaten) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Länge  (in cm) | 0 | 5,5 | 9,8 | 13,2 | 15,8 | 17,8 | 19,4 | 20,6 | 21,6 | 22,3 | 22,9 |

a) Wie verändert sich die Wachstumsgeschwindigkeit mit der Zeit? Offensichtlich ist hier die Zuwachsrate nicht von der momentanen Länge abhängig, sondern ...?

b) Löse die entsprechende Differenzialgleichung. Als zusätzliche Informationen wähle einen Wert "aus der Mitte".

c) Vergleiche die Funktionswerte der gefundenen Funktion mit den gemessenen Daten.

Menschenwachstum

Für das Wachstum eines jungen Mannes wurden die folgenden Körperlängen gemessen. Verfahre wie bei Aufgabe 1. Was fällt auf? Erklärung?

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Alter  (Jahre) | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 30 |
| Länge  (cm) | 52 | 82 | 106 | 117 | 130 | 141 | 150 | 162 | 178 | 183 | 184 | 185 |

Lösungen: Von Fischen und Menschen

Forellenwachstum

f(t) = (f(0) - G) · e-r t + G ist ein für den Sachverhalt passender Ansatz.

G = 25, f(0) = 0 sind gegeben.

Um r zu bestimmen, wähle einen Punkt aus der Tabelle, am besten einen "in der Mitte": f(5) = 17,8.

|  |  |
| --- | --- |
| -25 · e- r · 5 + 25 | = 17,8 |
| e-5 r | = 0,288 |
| -5 r | = -1,2448 |
| r | ≈ 0,24896 |

Also: f(t) = -25 · e-0,24896 t + 25

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Zeit | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| empirische Werte | 0 | 5,5 | 9,8 | 13,2 | 15,8 | 17,8 | 19,4 | 20,6 | 21,6 | 22,3 | 22,9 |
| berechnete Werte | 0 | 5,51 | 9,81 | 13,15 | 15,76 | 17,80 | 19,39 | 20,62 | 21,59 | 22,34 | 22,93 |

Es ist sofort zu sehen: gute Übereinstimmung.

Menschenwachstum

f(t) = (f(0) - G) · e-r t + G

G = 185, f(0) = 52 sind gegeben. Wähle z. B. f(10) = 141:

|  |  |
| --- | --- |
| (52 - 185) · e- r · 10 + 185 | = 141 |
| e-10 r | = 0,3308 |
| -10 r | = ln 0,3308 |
| r | ≈ 0,1106 |

Also: f(t) = -133 · e-0,1106 t + 185

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Zeit | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 30 |
| empirische  Werte | 52 | 82 | 106 | 117 | 130 | 141 | 150 | 162 | 178 | 183 | 184 | 185 |
| berechnete  Werte | 52 | 78,4 | 99,5 | 116,5 | 130,1 | 140,9 | 149,7 | 156,7 | 162,3 | 166,8 | 170,4 | 180,2 |

Zu Beginn (2/4 Jahre) und am Ende (ab 14 Jahre) ist die Näherung nicht gut, in den Zwischenjahren (6 bis 12 Jahre) passt das Modell gut. In der Pubertät wachsen Menschen sehr schnell und erreichen ihre Endgröße auch früh – im Gegensatz zum Ansatz.

# Differenzialgleichungen der Form f' = a · f²

**Formale Übung**

f' = a · f2

 = a

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Substituiere: |  |  |  |
| Rückübersetzt: |  |  |  |

**Wachstum:**

Eine Größe wächst überexponentiell; z. B. ist die relative Wachstumsrate f'/f proportional zum erreichten Bestand.

 = a · f (a konstant)

f ' = a · ²

**Verlauf des Graphen:**

f hat einen Pol bei xp = ; mit Vorzeichenwechsel.

a > 0, c > 0 ⇒

|  |  |
| --- | --- |
|  | Bei Annäherung an c/a wächst die Größe über alle Grenzen. Der Ansatz kann nur in begrenzten Bereichen ein reales Größenwachstum modellieren; z. B. im Bereich D. Prinzipiell kann in einer begrenzten Welt keine Größe über jede Grenze wachsen. |

# Differenzialgleichungen der Form f' = a f² + b f

Herleitung der Lösung

**Formale Übung:**

f ' = a · f² + b · f

= a + 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Substituiere: | g =  = f-1  g' = - |  |
| Rückübersetzt: | f = | |

**Wachstum:**

α) Eine Größe wächst proportional zu ihrer Größe und zum verbleibenden Restraum.

f ' = r f · (G - f) (r, G konstant).

β) Die relative Wachstumsrate f'/f vermindert sich mit zunehmender Größe:

 = c – s f (c, s konstant). Nach Konstantenumbenennung erhält man α.

**Zusammenfassung:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Verlauf des Graphen** für r > 0, G > 0:  ◼ Für kleine Werte von f ist G - f ≈ G und  f' ≈ r G f ≈ const. f, also proportional zu f wie bei Diff.-Gleichung 1.  ◼ Bei Annäherung an G ist f ≈ G und  f ' ≈ r · G · (G - f) = const. (G - f); also proportional dem Restraum wie bei Diff.-Gleichung 2.  ◼ Zu Beginn wächst f also etwa exponentiell, am Ende gebremst. | mit ; da  s-förmiger Verlauf, logistische Funktion |

Baggern, begradigen, betonieren

BUND warnt vor zunehmender Hochwassergefahr

|  |  |
| --- | --- |
| Nach dem "Jahrhundert-Hochwasser" zu Weihnachten an Rhein und Nebenflüssen darf nach Ansicht des Bundes für Umwelt- und Naturschutz Deutschland (BUND) jetzt nicht zur Tagesordnung übergegangen werden. Weil die Menschen der Natur ins Handwerk gepfuscht hätten und weiter ausgebaggert, begradigt und betoniert werde, sei bald alle Jahre ein neues Jahrhundert-Hochwasser zu befürchten, warnte der BUND-Vorsitzende Hubert Weinzierl am Mittwoch in Bonn. Die nächste Katastrophe könne schon die Schneeschmelze im Frühjahr bringen.  Niemand könne mehr leugnen, sagte Weinzierl, dass die Hochwasser hausgemacht seien, denn das "Puffervermögen" des Ökosystems entlang der Flussläufe sei ausgereizt. Dennoch würden an jedem einzelnen Tag in Deutschland weiterhin 90 Hektar für Straßen, Parkplätze oder Fabrikhallen geopfert. Auch die 12 000 Kilometer neugeplanter Fernstraßen und Autobahnen sprächen jeder Bodenschutzpolitik Hohn. Inzwischen seien 12,5 Prozent der Fläche in Westdeutschland versiegelt, in Ballungsgebieten bis zu 70 Prozent.  Zudem müsse aufgrund der Klimaveränderungen mit zunehmenden Niederschlägen gerechnet werden, wäh- | rend durch das Waldsterben die Fähigkeit der Böden zur Wasserspeicherung sinke, sagte BUND-Mitarbeiter Hubert Weigert.  Der BUND-Vorsitzende forderte die Politik auf, endlich zu handeln. Notwendig seien eine konsequente Renaturierung von Bächen und Flüssen; der Schutz von Wäldern und Feuchtgebieten sowie die Schaffung und Wiederherstellung natürlicher Überschwemmungsflächen an den Flüssen. Jetzt gelte es auch, 100 000 bis 200 000 Hektar Auenwälder an Elbe, Saale und Oder zu retten. Weinzierl kündigte eine Postkarten-Aktion an Bundesverkehrsminister Matthias Wissmann (CDU) an unter dem Motto "Finger weg von Elbe, Saale, Havel und Donau".  Unterdessen hat die SPD-Opposition einen Antrag mit ähnlichen Forderungen im Bundestag eingebracht. Darin fordert sie, die Fehler beim Ausbau von Rhein, Saar und Mosel dürften bei Elbe, Saale und Donau nicht wiederholt werden. Verlangt wird ein Bodenschutzgesetz, das eine weitere Versiegelung der Oberflächen in Siedlungen, im militärischen Bereich und durch Verkehrsanlagen verhindern soll. |

Frankfurter Rundschau, 10.02.1994

Zusatzformation:

Die Fläche von Westdeutschland einschließlich Berlin beträgt ca. 248 700 km².

|  |  |
| --- | --- |
| Aufgabe:  1. Unterstelle ein Anwachsen der Betonwüsten nach logistischem Wachstum.  Bestimme die Funktion, die die Flächenmaßzahl des betonierten Areals beschreibt.  2. Wie viel km² Fläche bzw. welcher Anteil sind in Westdeutschland einschließlich Berlin unter der obigen Annahme bis zum Jahr 2000 (2020, in the year 2525) betoniert?  3. Wie lange wird es unter diesen Vorzeichen dauern, bis sich die Betonwüste verdoppelt, also ein Viertel der Republik versiegelt ist? |  |

Lösungen: Baggern, begradigen, betonieren

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | Gegeben: | G = 248 700; f(0) = 12,5 % · 248 700 ≈ 31 087,5;  f '(0) = 90  = 328,5  mit x: Jahre ab 1993 |
|  | Ansatz: | f(x) = |

Problem: G und f(0) beziehen sich auf Westdeutschland, f '(0) auf Deutschland. Es könnte auch dort Westdeutschland gemeint sein. So wird im Folgenden gerechnet.

Mit den ersten beiden Daten lautet die Funktion:

f(x) = 

f '(x) = 

f '(0) =  = 27 198,9 b = 328,5

b ≈ 0,012

Also f(x) = 

2. Jahr 2000 bzw. x = 7, denn die veröffentlichten Daten vom 10.02.1994 stammen von 1993.

f(7) ≈ 33 441 bzw. 13,4 %

Jahr 2020 bzw. x = 27: f(27) ≈ 41016 bzw. 16,5 %

Jahr 2525 bzw. x = 532: f(532) ≈ 245 789 bzw. 98,8 %

|  |  |
| --- | --- |
| 3. |  |

In rund 71 Jahren, also im Jahr 2064 ist Westdeutschland zu einem Viertel betoniert (doppelt so viel wie 1993), wenn die Entwicklung so weitergeht (logistisch).

2 Aufgaben zur Übung I

1. Das Land Nowhere hatte 1990 rund19 Mio. Einwohner und nahm um rund 2,7 % zu. Mit einer Stabilisierung der Bevölkerungszahl wird bei etwa 50 Mio. gerechnet.

a) Leite eine passende logistische Funktion her.

b) Wie groß ist erwartbar die Bevölkerungszahl im Jahr 2005 und 2050?

c) Wie groß wird dann noch das Wachstum, absolut und relativ, sein?

d) Wann ist etwa die Grenze zur Hälfte erreicht?

2. Eine Einzellerpopulation lässt sich beschreiben durch eine logistische Funktion mit

a = -7,33 · 10-7 und b = 0,2933.

5 Stunden nach dem Ansetzen besteht sie aus rund 40 000 Zellen.

a) Notiere den Funktionsterm.

b) Gegen welchen Wert strebt die Zahl der Zellen?

c) Skizziere mit einem Funktionenplotter die Graphen zu f(x) und f '(x).

d) Lies die Stelle und den Funktionswert beim maximalen Wachstum ab.

Vergleiche mit dem Ergebnis aus b).

Lösungen

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. | a) | Gegeben: | G = 50 · 106; f(0) = 19 · 106; f '(0) = 2,7 % · 19 · 106 |
|  |  |  | mit x: Jahre ab 1990 |
|  |  | Ansatz: | f(x) = |
|  |  | Daten einsetzen: | k =  ≈ 3,26 · 10-8 |
|  |  |  | f(x) = |
|  |  |  | f '(x) = |
|  |  |  | f '(0) =  = 0,027 · 19 · 106 ⇒ b ≈ 0,0435 |
|  |  | Ergebnis: | f(x) = |
|  | b) | 2005 bzw. x = 15: f(15) ≈ 27,2 · 106 | |
|  |  | 2050 bzw. x = 60: f(60) ≈ 44,6 · 106  Zur Probe: 1990 bzw. x = 0 : f(0) = 19 · 106 | |
|  | c) | f '(15) ≈ 540 000;  ≈ 2,0 % | |
|  |  | f '(50) ≈ 151 000;  ≈ 0,34 % | |
|  | d) | f(x) = 25 · 106 ⇒ x ≈ 11 bzw. 2001 | |
|  | Zu b), c), d)  2005 liegt kurz nach dem Erreichen von G/2. Die Bevölkerung steigt noch stark mit 540 000 bzw. 2,0 %. Dagegen liegt die Bevölkerungszahl 2050 schon in der Nähe von G und wächst nur noch wenig: um 151 000 bzw. 0,34 %. | | |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2. | a) | Gegeben: | | a = -7,33 · 10-7, b = 0,2933 , f(5) ≈ 30 000 |
|  |  |  | | mit x: Stunden seit dem Ansetzen der Nährlösung |
|  |  | Ansatz: | | f(x) = |
|  |  | Daten einsetzen: | | f(x) = |
|  |  |  | | f(5) =  = 40 000 ⇒ k = 9,75 · 10-5 |
|  |  | Ergebnis: | | f(x) = |
|  | b) | Für x → ∞ geht e-0,2933 x gegen Null, f(x) gegen G =  = 400 000. | | |
|  | c) | f(x) |  | |
|  |  |  |  | |
|  |  | f '(x) |  | |
|  | d) | Die Steigung ist maximal bei xW ≈ 12,5 und f(12,5) ≈ 200 000. | | |
|  |  | Die maximale Steigung bzw. die Wendestelle liegt vor, wenn die Population  erreicht hat. | | |

Zusatz A: Die Trendwende

Die Trendwende TW (Wendestelle) liegt bei: TW = . Zeige das.

(Rechne mit dem formalen Ansatz, da er leichter zu überblicken ist.)







Zusatz B: Funktionswert bei der Trendwende

Der Funktionswert der Trendwende liegt bei , das heißt: Ist die Grenze zur Hälfte erreicht, nimmt das Wachstum wieder ab, das bis dahin zugenommen hat.

**Herleitung 1:**

Einsetzen von TW in die Funktion:



**Herleitung 2:**

Aus der Ausgangsdifferenzialgleichung

f ' = r · f · (G - f)

f ' = r · G · f - r · f²

f '' = r · G · f ' - 2 · r · f · f '

Wendepunkt ⇒ f '' = 0



Zusatz C: Umformulierung der Lösung

Die Lösung einer Differenzialgleichung ④ lässt sich so schreiben, dass sich sofort die Grenze G, die Trendwende TW und der Wachstumsfaktor w (exponentielles Wachstum für kleine f bzw. G f) erkennen lässt, und zwar:



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Formale Übung** |  | Wachstum |
|  |  |  |
| ⇒ f(x) oben mit |  | ⇒ f(x) oben mit |
|  |  | bzw. TW = |

Stromprognose

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Aus einem  Unterrichtsbericht zum Thema  Strombedarfsprognosen  (aus: W. Schmidt,  Mathematikaufgaben,  Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt,  Stuttgart 1984, S. 41 f.).  Es wurden gerade zwei verschiedene exponentielle Prognosen erstellt  (L steht für Lehrer): |  | L: | Genau diese Unsicherheit in der Vorhersage ist einer der Streitpunkte bei der öffentlichen Diskussion der Kernkraftwerke. Die einen, die Kraftwerke bauen wollen, nehmen die höheren Werte, während die Gegner die kleineren Werte zitieren. So kann man sogar zum Ergebnis kommen, dass keine neuen Kraftwerke nötig sind. | | | | | | | | | | | |
| Thomas: Eines verstehe ich nicht. Heißt das, dass man niemals genauer vorhersagen kann, wie viele Kraftwerke gebaut werden müssen? | | | | | | | | | | | | |
| L: | Eine ganz gute Frage, auf die ich schon gewartet habe. Das ist genau der springende Punkt: Wie kann man die Vorhersage genauer machen!  Wir haben doch hier nur eine Milchmädchenrechnung gemacht. In Wirklichkeit sitzen doch in den Elektrizitätswerken ausgewachsene Mathematiker, die solche Vorhersagen nach allen Regeln der Kunst machen. Unsere Rechnung sollte doch nur zeigen, wie das prinzipiell läuft. Ich werde Ihnen gleich zeigen, mit welchen Funktionen von offizieller Seite gearbeitet wird.  Jahresverbrauch in der BRD | | | | | | | | | | | |
|  | a) | Stellen Sie die Tabellenwerte graphisch dar. | | | | | | | | | | |
| Jahr 19.. | | | 20 | 30 | 40 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 |
| Verbrauch In Mrd. Wh | | | 6 | 10 | 20 | 30 | 50 | 83 | 127 | 185 | 250 | 310 |
|  | b) | Zeichnen Sie in das gleiche Koordinatensystem den Graph der Funktion  f(x) =  im Bereich 20 ≤ x ≤ 100. | | | | | | | | | | |
|  | Ich kann Ihnen nicht das Verfahren beschreiben, mit dem man gerade auf diese Funktion kommt. Das ist sicher auch für mich zu speziell. Aber das spielt ja für das Folgende keine Rolle | | | | | | | | | | | |

1. Lies an der angegeben Prognosefunktion unmittelbar ab

a) den Grenzwert G,

b) die Trendwende (Wendestelle),

c) den Wachstumsfaktor "zu Beginn" der Größenentwicklung

d) Bestimme aus w den Wachstumsprozentsatz (für f G).

e) Prüfe ihn nach für den Zeitraum 1950 / 1955

Tipp: f(55)= f(50) · w5

2. Analogisiere eine formale Differenzialgleichung f ' = a · f² + b · f

a) Bestimme b.

b) Bestimme a.

c) Notiere die Differenzialgleichung.

d) Notiere die übliche Lösung.

e) Passe k so an, dass die Lösung mit der angegeben übereinstimmt.

Lösungen: Stromprognose

1. a) G = 500

b) TW = 75, entspricht 1975

c) w = 1,1

d) p = 10 %

e) 50 = 30 · w5

w5 = 

w ≈ 1,108

p ≈ 10,8 %

2. a) w = eb

b = ln w

b = ln 1,1

b ≈ 0,095

b) G = 

a = 

a ≈ 

a ≈ - 1,9 · 10-4

c) f' = - 1,9 · 10-4 · f² + 0,095 · f

d) f(x) = 

e) Berechne f(0) aus dem gegebenen Funktionsterm:

f(0) =  ≈ 0,393

Bestimme damit k im Funktionsterm aus 2. d) oben:

 = 0,393 bzw. k ≈ 2,543

⇒ f(x) = 

Roboter

**"Karriere der Roboter"**

Einer Zeitungsnotiz (mit dem genannten Titel) war zu entnehmen, dass es 1984 in Westdeutschland 6600 installierte Industrieroboter gab. 1988 waren es bereits 17700. Nach einer ebenfalls angegebenen Schätzung liegt die Sättigungsgrenze bei 59000 Robotern.

a) Setze eine logistische Funktion an. Ermittle das Ausbreitungsgesetz. Notiere die Ausgangs-Differenzialgleichung

b) Die Sättigungsgrenze kann praktisch als erreicht gelten, wenn sie theoretisch zu   
99 % erreicht ist. Wann wird dies der Fall sein?

c) In welchem Jahr ist die größte jährliche Zuwachsrate zu erwarten?

d) Bestimme die Ausbreitungsfunktion so, dass charakteristische Daten sofort zu erkennen sind.

Lösungen

a) 1. f ' = r · f (G - f) bzw. f ' = a · f² + b f

Lösung: f(x) =  wegen G = 

2. Für f(x) sind k und b zu bestimmen. Beginnt die Zeit x mit 1984, so gilt:

◼ k =  ≈ 1,35 · 10-4

◼ Der Jahreszahl 1988 entspricht die Stelle x = 4:

f(4) =  = 17 700 ⇒ b ≈ 0,306

Zusammen: 

3. Für die Ausgangs-Differenzialgleichungen fehlen noch a und r:

a = -  ⇒ a ≈ -5,19 · 10-6 bzw. r = - a = 5,19 · 10-6

f ' = - 5,19 · 10 –6 · f² + 0,306 · f bzw. f ' = 5,19 · 10 –6 · f · (59 000 - f)

b) f(x99) =  = 0,99 · 59 000

x99 ≈ 21,5 entspricht 2005/2006

c) TW =  ≈ 6,78 ≈ 7 entspricht 1991

f ' maximal, wo f '' = 0; das ist bei TW der Fall.

d)w = eb ≈ e0,306 ≈ 1,358

p % ≈ 35,8 %

Zu Beginn nimmt die Funktion mit rund 36 % jährlich zu.

G = 59 000 (siehe Text)

TW = 6,78 (siehe c)

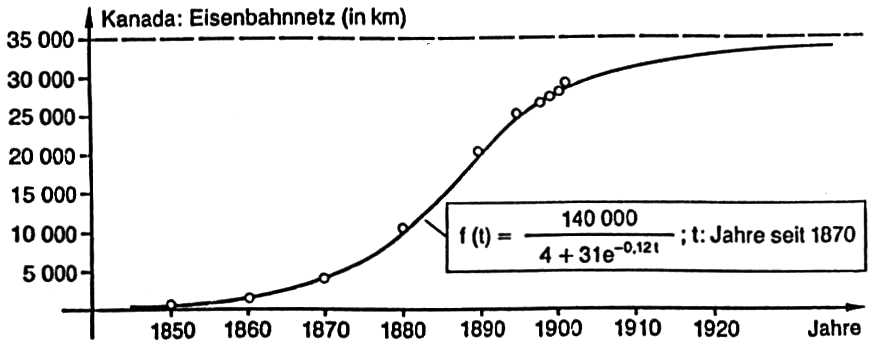
Zusammen: f(x) = 

Kanadas Eisenbahn

Bei der Erschließung eines Landes durch die Eisenbahn (z. B. USA, Kanada im letzten Jahrhundert) werden zunächst Industrieansiedlungen gefördert, die ihrerseits dann den Ausbau des Schienennetzes beschleunigen. Nach einer gewissen Zeit wirkt sich eine natürliche Sättigungsgrenze verlangsamend aus. Das folgende Schaubild zeigt die Entwicklung in Kanada zwischen 1840 und 1901 sowie die mathematische Beschreibung dieses Prozesses. Die zugehörige Differentialgleichung hat die Form:

f '(t) = 0,000 003 4 · f(t) · (35 000 - f(t))

**Kanada Eisenbahnnetz (in km)**



**Tatsächliche Werte (Jahresende)**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1840 | 1850 | 1860 | 1870 | 1880 | 1890 | 1895 | 1898 | 1899 | 1900 | 1901 |
| 26 | 114 | 3359 | 4018 | 11087 | 22533 | 25712 | 17161 | 27755 | 28697 | 29435 |

a) Leite die oben angeführte Funktion aus den Daten der notierten Differentialgleichung her.

Bestimme k mit f(0) (Tipp: s. t-Wahl und die Tabelle).

b) c) Aus der mathematischen Fassung ergibt sich z. B., dass der Zuwachs um – b – am größten war, er betrug jährlich etwa – c – %.

a) f'(x) = 3,4 · 10- 6 · f · (3,5 · 104 – f)

also: G = 35 000

r = 3,4 · 10-6

und: a = -r = -3,4 · 10-6

b = r · G ≈ 0,119

I) f(x) = 

f(0) =  = 4018

k ≈ 2,2 · 10-4

4018 entspricht dem Wert für f(0) aus der Tabelle für 1870.



Erweiterung mit 140 000 liefert den angegeben Funktionsterm.

II) w = eb = e0,199 ≈ 1,126

TW =  ≈ 17,2



b) Der Zuwachs ist am größten bei der Trendwende.

TW = 17,2 entspricht 1870 + 17 = 1887

c) Setzt man f(TW) = G/2 in die Ausgangsdifferentialgleichung ein, so ergibt sich:

f '(TW) = r ·  · (G - ) = r ·  = 3,4 · 10-6 ·  ≈ 1041

relative Zunahme:  ≈ 5,9 %

Oder: f '(x) =  und f '(TW) = 

hier: f '(TW) =  ≈ 1038 und  ≈ 5,9 %

Im Bereich der Trendwende nimmt die Eisenbahnnetzlänge um rund 6 % im Jahr zu, absolut um rund 1040 km pro Jahr.

Die absolute Zunahme ist im Bereich der Trendwende am größten; die relative Zunahme ist am Anfang der Entwicklung am größten; etwa p = 12,6 % (s. o. w = 1,126), solange f G.

Neun Milliarden Menschen in 2075

|  |  |
| --- | --- |
| Die Weltbevölkerung wird bis zum Jahr 2075 auf 9,2 Milliarden Menschen anwachsen. Dies ist das Ergebnis der neuesten Langzeitberechnung der Vereinten Nationen, die gestern in New York veröffentlicht wurde. Derzeit leben 6,3 Milliarden Menschen auf der Erde. Die UN-Bevölkerungsabteilung hat erstmals auch die Bevölkerungszahl der Welt in 300 Jahren geschätzt: Danach wird es auch im Jahr 2300 neun Milliarden Erdenbewohner geben. Die UN-Statistiker räumten allerdings ein, dass diese Annahme auf der weltweiten Durchsetzung der Zwei-Kinder-Familie beruhe.  Bei Vorhersagen über einen so langen Zeitraum hinweg könne bereits eine leicht höhere Geburtenrate von 0,25 Kinder pro Frau zu einer Bevölkerungszahl von 36,4 Milliarden Menschen im Jahr 2300 führen. Die Bevöl- | kerung in den Industriestaaten wird nach UN-Angaben deutlich zurückgehen. Hingegen würde sich die Bevölkerung Afrikas trotz der Aids-Epidemie bis 2300 fast verdreifachen. Wenn die heutigen Trends sich fortsetzten, würde Deutschland in 300 Jahren nur noch von drei Millionen Menschen – der jetzigen Einwohnerzahl von Berlin bewohnt sein, erklärte die Deutsche Stiftung Weltbevölkerung (DSW).  Dies sei allerdings ein groteskes Szenario. In den nächsten 100 Jahren erwarteten die UN-Statistiker für die Bundesrepublik einen Bevölkerungsrückgang von jetzt 82 Millionen auf 73 Millionen. Der UN-Bericht zur Weltbevölkerung im Jahr 2300 geht auch davon aus, dass die Zahl der alten Menschen rapide steigt. |

Westfälische Nachrichten, 10.12.2003

Nimm 1990 als Trendwende in der Bevölkerungsentwicklung an.

Notiere die Prognosefunktion zu den angegebenen Daten mit x : Jahre ab 2003.

Kommentiere die 2. angegebene Grenze in 300 Jahren.

Lösung

Überlegungen zur Prognose für 2075

|  |  |
| --- | --- |
| f(x) =  G = 9,2 · 109  2003: f(0) = 6,3 · 109  1990: TW = -13  f(0) =  = 6,3 · 109  w-13 =  - 1    w ≈ 1,0615  f(x) = | Probe:  2003: f(0) ≈ 6,3 · 109  2075: f(72) ≈ 9,2 · 109  1990: f(-13) ≈ 4,6 · 109 = |
|  |

Überlegungen zur Prognose für 300 Jahre

Mit einem Grenzwert von G = 9 · 109 ergibt sich w = 1,0673.

Der Ansatz f(x) oben beschreibt allerdings nur ein Wachstum, das sich "von unten" dem Grenzwert nähert und nicht darüber hinausschießt (bis 9,2 · 109), um sich "von oben" zu nähern (9 · 109).

2 Aufgaben zur Übung II

1. Das Land Nirwonien hat 1995 rund 5 Mio. Einwohner und erreicht da sein maximales Wachstum. 2000 sind es etwa 6,3 Mio.

◼ Wo liegt die Wachstumsgrenze?

◼ Wie groß ist 2000 die jährliche Zunahme absolut und prozentual?

◼ Vergleiche mit 1995 und der "Anfangs"-Zunahme, etwa 1960.

2. Eine Einzellerpopulation kann auf maximal 9,2 Mrd. anwachsen. Die Aufzeichnung beginnt bei 6,3 Mrd. mit einem stündlichen Wachstum um 140 Mio.

◼ Notiere eine Lösung, der relevante Größen sofort zu entnehmen sind.

◼ Notiere die Größen und ihre Bedeutung.

◼ Vergleiche das "Anfangswachstum" mit dem vor 3 Tagen.

Lösungen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | Gegeben: | xw = TW = 0 mit x: Jahre ab 1995 |
|  |  | G = 10 · 106; da f(xw) =  = 5 · 106  f(5) = 6,3 · 106 |
|  | Ansatz: | f(x) = |
|  | Daten einsetzen: | f(x) = |
|  |  | f(5) =  = 6,3 · 106 ⇒ w ≈ 1,11 |
|  | Ergebnis: | f(x) = |
|  | Zunahme 2000: | f '(x) = |
|  |  | f '(5) = 388 700 |
|  |  | ≈ 6,2 % |
|  | Zunahme 1995: | f '(0) = 107 · ln 1,11 ≈ 1 044 000 bzw. 20,9 % |
|  | Zunahme 1960: | f '(-35) = 26 370 bzw. 10,4 %, denn f(-35) ≈ 252 686 |

Zu Anfang (1960) war die absolute Zunahme mit 26 370 gering. Sie stieg bis zum Maximalwert von 1 044 000 im Jahr der Trendwende 1995 an, wurde dann wieder geringer und erreicht im Jahr 2000 den Wert 388 700.

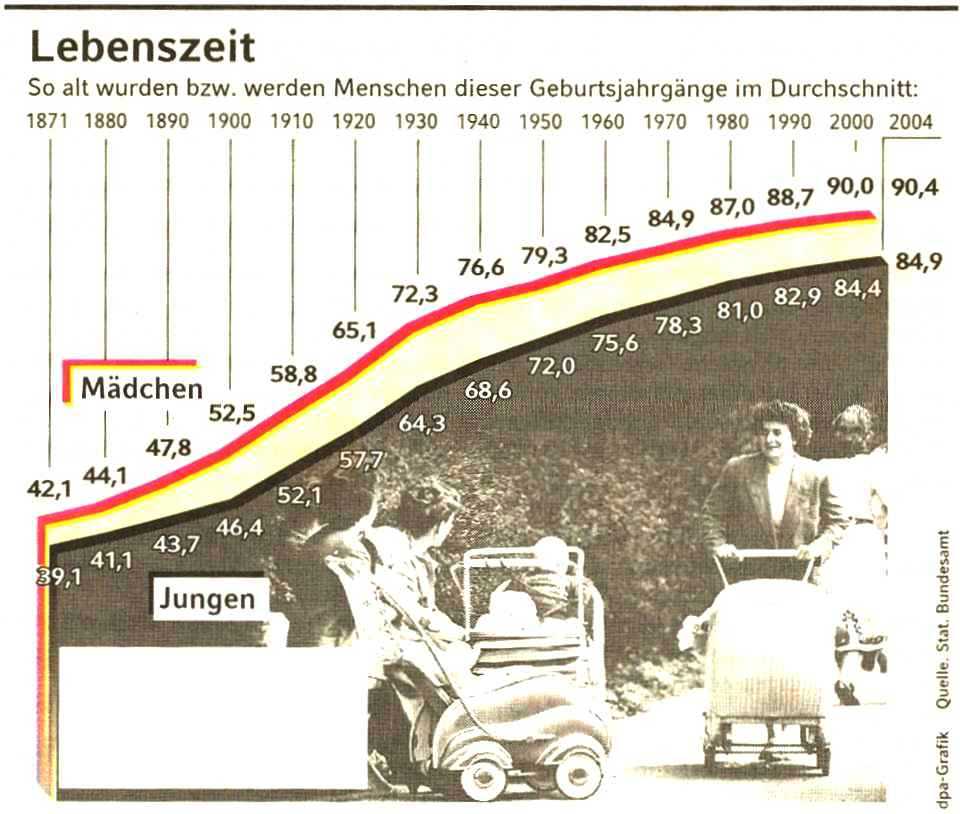
Die relative Zunahme lag mit 10,4 % zu Beginn (1960) in der Nähe des durch w vorgegebenen Wertes von 11 %, stieg bis 1995 auf 20,9 % und nahm bis 2000 auf 6,2 % ab.

Zu der geringen absoluten Zunahme gehört trotzdem eine hohe relative Zunahme, da die Gesamtbevölkerung 1960 noch gering war im Vergleich zu 1995 und 2000.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2. | Gegeben: | G = 9,2 · 109 |
|  |  | f(0) = 6,2 · 109  f '(0) = 140 · 106 |
|  | Ansatz: | f(x) = |
|  | Daten einsetzen: | k =  ≈ 5 · 10-11 |
|  |  | f(x) = |
|  |  | f '(x) = |
|  |  | f '(0) =  = 140 · 106 ⇒ b ≈ 0,0705 |
|  | Ergebnis: | f(x) = |
|  |  | =  durch schrittweise Umformung oder  Berechnung von w und TW |
|  | Bedeutung: | G = 9,2 · 109 ist schon im Text gegeben |
|  |  | TW = - 11 Schon vor 11 Stunden trat die Trendwende ein.  TW < 0 ergab sich schon aus der Information  f(0) > .  w = 1,073 Das Wachstum am Anfang (f G) betrug  p % = 7,3 %. |
|  | Vergleich: | "Vor drei Tagen" bzw. -72 Stunden |
|  |  | f '(x) =  oder f '(x) von oben  f '(-72) ≈ 8,58 · 106 bzw. 6,95 %, da f(72) ≈ 123,4 · 106 |

Das Wachstum vor 3 Tagen lag absolut bei 8,58 Mio. und relativ mit knapp 7 % in der Nähe des durch w bekannten Anfangswachstums von 7,3 %.

Lebenszeit



Frankfurter Rundschau, 01.08.2006

1. Notiere die Zunahme der Lebenserwartung von Jahrzehnt zu Jahrzehnt.

Wo etwa liegt eine "Trendwende" für Frauen, wo die für Männer?

2. Versuche eine Beschreibung der beiden Kurven durch einen Funktionsterm.

Bei welcher Lebenszeit hat die Kurve laut Term und nach Augenschein des Kurvenverlaufs seine obere Grenze?

Lösungen

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. | Jahre | Mädchen | Jungen |  | Zunahme der Lebenserwartung  Sowohl bei Mädchen als auch bei Jungen nahm die Lebenserwartung von 1920 bis 1930 am stärksten zu. Ich setze die Trendwende im Jahr 1925 an bei etwa einer Lebenszeit von 68,7 Jahren für Mädchen und 61,0 Jahren für Jungen. |
|  | 1871/80 | 2,0 | 1,0 |
|  | 1880/90 | 3,7 | 2,6 |
|  | 1890/00 | 4,7 | 2,7 |
|  | 1900/10 | 6,3 | 5,7 |
|  | 1910/20 | 6,3 | 5,6 |
|  | 1920/30 | 7,2 | 6,6 |
|  | 1930/40 | 4,3 | 4,3 |
|  | 1940/50 | 2,7 | 3,4 |
|  | 1950/60 | 3,2 | 3,6 |
|  | 1960/70 | 2,4 | 2,7 |
|  | 1970/80 | 2,1 | 2,7 |
|  | 1980/90 | 1,7 | 1,9 |
|  | 1990/00 | 1,3 | 1,5 |

2. Die Kurve ist gut als logistische Kurve zu beschreiben: f(x) = .

Beginnt man die x-Achse bei 1870 bzw. 0, so liegt die Trendwende bzw. der Wendepunkt bei W(55|68,7) für Mädchen und W(55|61,0) für Jungen. Damit liegt auch GMädchen = 137,4 und GJungen = 132 fest, denn in W ist G/2 erreicht.

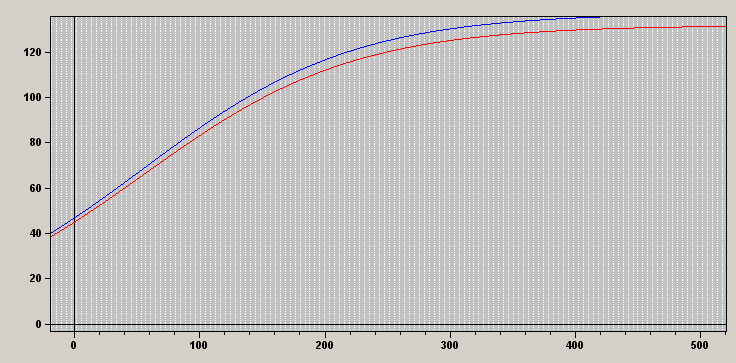
Mädchen fM(x) = ; Jungen: fJ(x) = 

Setzt man (1|42,1) in fM ein, ergibt sich w ≈ 1,015; mit (130|90) ist der Wert kleiner w ≈ 1,009. Der Mittelwert könnte passen w ≈ 1,012. fM(x) = .

(1|42,1) → 42,1 =  ⇒ w54 =  - 1 ⇒ w = 

(130|90) → 90 =  ⇒ w-75 =  - 1 ⇒ w = 

Für Jungen ergibt sich durch (1|39,1) w ≈ 1,016 und mit (130|84,4) w ≈ 1,008. Der Mittelwert lautet ebenfalls w = 1,012. fJ(x) = .



Obere Grafik – die Kurve für Mädchen und Frauen

Untere Grafik – die Kurve für Jungen und Männer

0 entspricht dem Jahr 1870; 130 also dem Jahr 2000.

# Beispiele für Differenzialgleichungen in der Physik und Rückführung auf die Fälle oben

**1.** Das Sinken eines Körper in einer Flüssigkeit (mit Reibung) führt auf die Differenzialgleichung m ·  = m · g - k · v. Dabei hängt k von der Flüssigkeit und der Art des Körpers ab. Wird die Zeit t vor dem Augenblick an gemessen, in dem man den Körper loslässt, so ist v0 = 0  für t = 0 sec. Bestimme das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz. Welchem Grenzwert strebt v für große t zu?

**2. (Kondensator-Entladung)** Ein Kondensator der Kapazität C entlädt sich über einen Widerstand R. Gesucht ist das Absinken der Spannung U in Abhängigkeit von der Zeit t und dem Widerstand R.

**Lösung**: Bekannt sind aus der Elektrik die Kondensatorgleichung Q = C · U und das Ohmsche Gesetz U = R · I. Damit wird Q = C · R · I (1).

Der bei der Entladung fließende Momentanstrom I(t) ist gleich der Ladungsänderung je Zeiteinheit, also I(t) = -. Damit hat man auch einen Zusammenhang mit der Zeit. Das Minuszeichen ergibt sich, weil der positiv gerichtete Strom eine Abnahme der Kondensatorladung bewirkt.

**3. (Abkühlungsgesetz nach Newton)** Eine Flüssigkeit der Augenblickstemperatur T befindet sich in einem Raum mit der niedrigen Temperatur T1. Nach Newton ist die Abkühlungsgeschwindigkeit  proportional zur Temperaturdifferenz T - T1 mit der Umgebung, also = k (T - T1). Die Konstante k hängt u. a. von der Masse der Flüssigkeit, ihrer Oberflächenbeschaffenheit und der spezifischen Wärme ab.

**4. (Spaltung von Rohrzucker in Glukose und Fruktose)** Zu Beginn der Reaktion

(t = 0 sec) sei die Rohrzuckerkonzentration a, zur Zeit t ist sie dann noch a - x. Dabei ist x die in dieser Zeit verschwundene Rohrzuckerkonzentration. Die Abnahme der Rohrzuckerkonzentration je Zeiteinheit ist die sog. Reaktionsgeschwindigkeit ; sie ist der augenblicklichen Rohrzuckerkonzentration a - x proportional, also gilt für x(t) die Differenzialgleichung = k(a - x), k > 0.

**5. (Lichtabsorption)** Dringt Licht der Intensität I in einen Licht absorbierenden durchsichtigen Stoff ein, dann ist die Abnahme der Augenblicksintensität I je Längeneinheit, die Änderungsgeschwindigkeit , proportional zur Augenblicksintensität I, also gilt = - kl, k < 0.

**6. (Einschalten eines Gleichstroms)** An einer Gleichspannung U0 liegen hintereinander der Widerstand R und die Induktivität I. Beim Einschalten nimmt die Stromstärke I erst nach einiger Zeit ihren Endwert Im an. Die Spannung U0 muss die Ohmsche Spannung I · R und die induktive Gegenspannung L ·  überwinden, es gilt also .

**7. (Radioaktiver Zerfall)** Bei einem radioaktiven Präparat, das aus N0 Atomen besteht, ist die "Zerfallsgeschwindigkeit" , d. h. die Zahl der je Zeiteinheit zerfallenden Atome, proportional der augenblicklichen Zahl N der noch nicht zerfallenen Atome. Somit ist  = - kn. k > 0 heißt Zerfallskonstante,  bezeichnet man als mittlere Lebensdauer.

**8.** Für den Durchlauf einer Flüssigkeit der Viskosität η durch eine Kapillare mit Länge l und Radius r gilt das Gesetz von Hagen-Poiseuille



**9.** Man kann das Verhalten eines Auslaufrohrs bei gleichzeitigem Zulauf und Ablauf untersuchen. Am einfachsten sind die Verhältnisse, wenn die Zuflussrate z konstant ist. Ist die Anfangshöhe im Ausflussrohr h = 0, so ist zu Beginn die Abflussrate a = α · h kleiner als die konstante Zuflussrate z. Die Wasserhöhe steigt also zunächst. Damit nimmt aber auch die Abflussrate zu. Die Wasserhöhe im Ausflussrohr wächst deswegen bis zu einem Gleichgewichtsstand h∞, in welchem die Zulaufrate gleich der Abflussrate ist. Der Vorgang wird durch die Differenzialgleichung  = z - α · h beschrieben

Lösungen

1. Zähes Medium

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | m · v' = m · g – k · v |  | f = v (t)  f = a f + b → 2 | Geschwindigkeit |

2. Kondensatorentladung

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Q = - C · R · Q' |  | f = Q (t)  f' = a · f → 1 | Ladung |

3.Abkühlung

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | T' = - k(t – T1) |  | f = T (t)  f' = a · f + b → 2 | Temperatur |

4.Rohrzuckerkonzentration

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | c' = k · (a – c) |  | f = c (t)  f' m= a · f + b → 2 | Konzentration |

5. Lichtabsorption

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | I' = – k · I |  | f = I (x)  f' = a · f → 1 | Intensität |

6. Gleichstromeinschaltung

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | U0 = I · R – L · I |  | f = I (t)  f' = a · f + b → 2 | Stromstärke |

7. Radioaktiver Zerfall

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | N' = – k · N |  | f = N (t)  f' = a · f → 1 | Zahl der Atome |

8. Rohrauslauf

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | h' = – a · h |  | f = h (t)  f' = a · f → 1 | Höhe |

9. Rohrzulauf und -ablauf

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | h' = z – α · h |  | f = h (t)  f' = α · f + b → 2 | Höhe |

# Klausuraufgaben

Eine Population

a) Eine Population nimmt – ungehindertes Wachstum unterstellt – jährlich um 5 % zu.

◼ Notiere eine passende Funktion.

◼ Der ‚Vorgang' lässt sich auch als Differenzialgleichung darstellen. Bitteschön.

◼ Notiere den Lösungsgang von der Differenzialgleichung zur Funktion.

◼ Schreibe den Funktionsterm hin für f (0) = 7.

b) Für eine Population gilt in der Regel, dass ihre Wachstumsrate sowohl zum vorhandenen Bestand als auch zum verbleibenden "Restraum" proportional ist.

◼ Zeige: die passende Differenzialgleichung ist vom Typ f' = a · f² + b · f.

◼ Leite die Lösung der Differenzialgleichung her.

◼ Notiere den Funktionsterm und skizziere den Graphen der Funktion für

a = - 1,6 · 10-12 und b = 0,032 über [0|150], wenn als Anfangswert f (0) = 5 · 109 gilt.

◼ Gegen welchen Wert geht f für x gegen unendlich? Erläutere seine Bedeutung für das Wachstum der Population.

c) Für eine Population wie in b beschrieben "kippt" die Entwicklung; heißt: ab einem bestimmten Funktionswert nehmen die Wachstumsraten ab.

◼ Leite den Funktionswert her durch Nutzung der Differenzialgleichung.

◼ Als zweiten Versuch der Herleitung bestimme den Funktionswert der 'Trendwende' mit Hilfe der Wendestelle , wobei  gilt.

xw hab ich freundlicherweise bestimmt.

Oder mit etwas anderer Aufgabenstellung:

a) Eine Population nimmt - ungehindertes Wachstum unterstellt – jährlich um 5 % zu.

◼ Notieren Sie eine passende Differentialgleichung und eine passende Funktion.

◼ Leiten Sie die Funktionsgleichung aus der Differentialgleichung her.

◼ Wie lautet der konkrete Funktionsterm, wenn f(0) = 7?

Statt 5 % Wachstum gibt man anschaulicher die Verdopplungszeit D an.

◼ Leiten Sie die Formel zur Berechnung von D her.

◼ Notieren und begründen Sie eine Näherungsformel zur D-Berechnung.

◼ Berechnen Sie auf beide Weisen D und vergleichen Sie.

b) Für eine Population gilt i. d. R., dass ihre Veränderung sowohl zum vorhandenen Bestand als auch zum verbleibenden ‘Restraum’ proportional ist.

◼ Zeigen Sie: die passende Differentialgleichung ist vom Typ f ’ = a f² + b f.

◼ Notieren Sie eine zur Differentialgleichung passende allgemeine Lösung.

◼ Für die Weltbevölkerung gilt etwa: a = -1,6 · 10- 12 und b = 0,032, wobei 1985 etwa 5 Milliarden erreicht waren. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung?

◼ Skizzieren Sie den Funktionsgraphen ab 1985 für 150 Jahre.

◼ Erläutern Sie: Gegen welchen Wert wächst die Weltbevölkerung nach diesem Ansatz?

c) Die Ergebnisfunktion in b lässt sich auch so formulieren, dass ihr sofort relevante Daten zu entnehmen sind.

◼ Notieren Sie die Funktion allgemein und für die konkreten Daten der Weltbevölkerung.

◼ Wie war der Wachstumsprozentsatz zu ‘Beginn’? Erläutern Sie seine Bedeutung, auch an der Ausgangsdifferentialgleichung.

◼ Notieren Sie die Koordinaten des Wendepunktes.

◼ Die Trendwende liegt bei xW = . Leiten Sie damit den Funktionswert des Wendepunktes allgemein her.

Lösungen: Klausur

Erste Version:

a) ◼ f(x) = f(0) · 1,05x

◼ w = ea ⇒ a ≈ ln w ≈ 0,049

f ' = 0,049 · f

◼  = 0,049



◼ Mit f(0) = 7 gilt:

f(x) = 7 · 1,05x

bzw. f(x) = 7 · e0,049x.

b) ◼ f ' = r · f · (G – f) = r · G · f – r · f²

r entspricht der Proportionalitätskonstanten und G entspricht der Grenze für f; also entspricht G - f dem "Restraum".

Mit der Umbenennung der Konstanten r G = b und -r = a ergibt sich

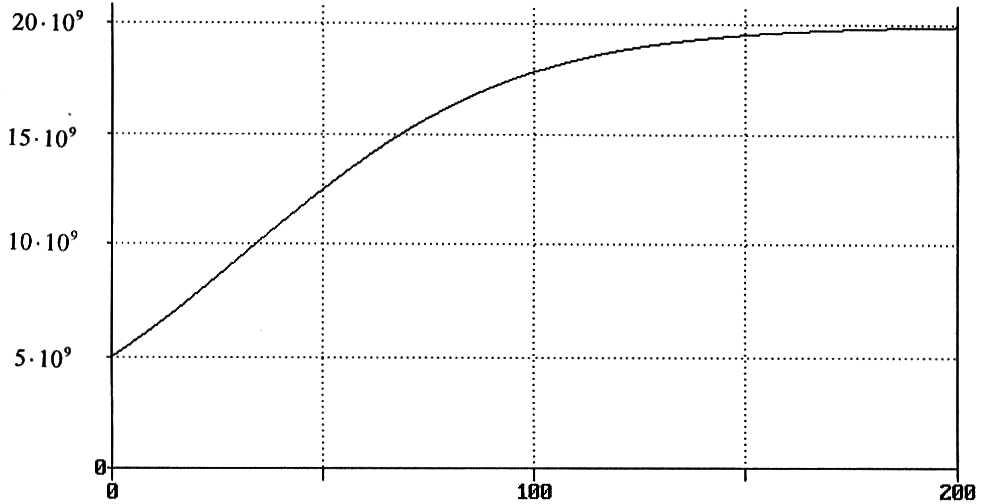
◼ f ' = a · f² + b · f



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Substituiere |  | und damit: |  |
|  | -g' = a + b g |  |  |
|  | g' = - b g - a | und |  |
|  |  |  |  |
| Substituiere | h = g + | und damit: | h' = g' |
|  | h' = - b · h |  |  |
|  | = - b |  |  |
|  | (ln h)' = - b |  |  |
|  | ln h = - bx + c |  |  |
|  | h = e-bx · k |  |  |
|  | g = k · c-bx - |  |  |
|  | f = |  |  |

◼ f(0) =  = 5 · 109 ⇒ 1 = 5 · 109 · k + 25 · 10-2 ⇒ k = 1,5 · 10-10

⇒ f(x) = 



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Wertetabelle** | x | 0 | 50 | 100 | 150 |
|  | f(x) | 5 · 109 | 12,5 · 109 | 17,8 · 109 | 19,5 · 109 |

Für x → ∞ ⇒ e-0,032x strebt gegen Null, also:

= 2 · 1010 = 20 000 000 000

20 Milliarden ist die obere Wachstumsgrenze für die Population.

c) zu c siehe Zusatz B – Funktionswerte bei der Trendwende.

Ein Land erstickt an Menschen

|  |  |
| --- | --- |
| (...) Im islamischen Pakistan wächst die Bevölkerung ungehindert. Sie wächst so schnell, dass seit dem vergangenen Jahr Nahrungsmittel eingeführt werden müssen, für teure Devisen, die das Land nicht hat. Das Bevölkerungswachstum ist Pakistans Problem Nummer eins. Es liegt derzeit bei 2,7 Prozent im Jahr. Es ist das Höchste in Südostasien, und wahrscheinlich ist diese Zahl auch noch geschönt. Wenn es so weiter geht, wird Pakistan demnächst auf Platz drei der bevölkerungsreichsten Staaten der Erde liegen, hinter China und In- | dien, und sogar noch vor Indonesien. Bangladesh's 120 Millionen hat Pakistan mit 124 Millionen bereits 1993 überholt, schon heute viel zu viele in einem Land, das nur entlang der Flussufer fruchtbar ist und dessen wirtschaftliche Entwicklung weit zurück ist.  Die Zahlen des jüngsten Weltentwicklungsberichtes der UN sind niederschmetternd: 148 Millionen im Jahr 2000, 244 Millionen 2025, Stabilisierung bei 402 Millionen gegenüber Indonesiens 354 Millionen, dem Land, das heute mit 190 Millionen noch vor Pakistan liegt. (...) |

aus: Frankfurter Rundschau, 17.01.1994

a) Häufig wird in Publikationen von einem kontinuierlichen exponentiellen Wachstum ausgegangen. – Notieren Sie unter dieser Vorgabe eine passende Prognosefunktion, berechnen die voraussichtlichen Bevölkerungszahlen Pakistans für die Jahre 2000 und 2025 und vergleichen sie mit den angegebenen Werten. Erläutern Sie, inwiefern die Formulierung im Artikel die obige Vorgabe ausschließt.

b) Für eine realistischere Modellierung ist die UN vermutlich von einem logistischen Wachstum ausgegangen. – Erläutern Sie die passende Differentialgleichung

f = r · f · (G - f) und die Bedeutung der vorkommenden Konstanten. Lösen Sie die Differentialgleichung allgemein.

Teillösung: f(x) = 

Bestimmen Sie mit dem Anfangswert und der Zunahme für das Jahr 1993 eine spezielle Lösung der Differentialgleichung.

Berechnen Sie die Bevölkerungszahlen für die beiden Prognosedaten im Artikel und vergleichen Sie erneut.

c) Für die Einschätzung der Bemühungen um eine Begrenzung der Bevölkerungsentwicklung ist der Wendepunkt des Bevölkerungsgraphen eine wichtige Größe. Inwiefern bedeutet der Wendepunkt eine Trendwende?

Zeigen Sie mit der Differentialgleichung in b), dass der Funktionswert des Wendepunktes G/2 lautet. In welchem Jahr läge die Trendwende für Bangladesh?

Lösung

a) f(t) = 124 · 1,027t mit 1993 entspricht t = 0, Angaben in Millionen

Jahr 2000: f(7) = 149,4; Jahr 2025: f(32) = 290,9

Die Angabe zum Jahr 2000 passt etwa zur UN-Prognose, die für 2025 liegt weit daneben.

Eine Exponentialfunktion mit einem Wachstumsfaktor w > 1 wächst über alle Grenzen und stabilisiert sich nicht, wie es der Text angibt.

b) Die Differentialgleichung zur logistischen Funktion gibt vor: Die Größenänderung f’(x) ist dem erreichten Funktionswert f(x) und dem verbleibenden "Restraum"

(G-f(x)) proportional mit der Proportionaliätskonstanten r.

Die Funktionswerte gehen gegen die Grenze G. Zu Beginn des Wachstums (f(x) nahe Null , zumindest vernachlässigbar klein gegenüber G) ist f ' proportional zu f mit dem Proportionalitätsfaktor rG. Für diese anfängliche (nahezu) exponentielle Wachstumsphase steht erG für den Wachstumsfaktor.

Lösung der Differentialgleichung:

f ' = -r · f2 + rG · f bzw. -, wobei der Fall f = 0 hier ausgeschlossen sein soll.

Die Substitution g =  ergibt g’ = r – rG · g bzw. g’ = -rG (g - ).

Die 2. Substitution h = g -  führt auf h’ = -rG · h mit der Lösung h(x) = k · e-rGx.

Resubstituiert man g und f, so ergibt sich die angegebene Lösung.

Jahr 1993: f(0) = 124; f’(0) = 0,027124 = 3,348

f(0) = = 124 und G = 402 liefert k = 0,005577 und f’(0) = r · f(0) · (G-f(0)) = 3,348 ergibt r = 0,000971.

f(x) = 

Jahr 2000: f(7) = 148,6 und Jahr 2025: f(32) = 245,4

Die Zahlen liegen sehr nahe bei den UN-Prognosen. Dort wurde vermutlich so wie hier gerechnet.

c) Bis zum Wendepunkt nimmt die Steigung, hier die Bevölkerungszunahme, zu. Ab dem Wendepunkt nimmt sie ab. Die Tendenz wachsender Zunahme wendet sich zu einer abnehmenden (wenn auch immer noch) Zunahme.

f ' = rG · f - r · f2  und f '' = rG · f ' - 2r· f · f '. Die notwendige Bedingung für die Wendestelle f '' = 0 führt direkt zum Funktionswert des Wendepunktes f =  (wobei f ' ≠ 0).

Aus f(xW) = 201 folgt xW ≈ 20,7. Erst im Jahr 2014 hat die Wachstumszunahme in Bangladesh ihr Maximum erreicht und nimmt von da an ab, sofern die Prognose zutrifft.

**Unterrichtliche Voraussetzungen:**

Kurvendiskussion (Wendepunkt, Asymptote) 11.2/12.1

exp-Funktion, Integralrechnung 12.1

Differentialgleichungen 13.2

**Anforderungsbereiche:**

**I/II:** a: Funktion und Werte; b: Lösung der Differentialgleichung; c: Trendwende für Bangladesh

**III:** a: Bezug zur Stabilisierung; b: Erläuterung der Differentialgleichung und der Konstanten; c: Bedeutung der Trendwende, Herleitung von f(xw) aus der Differentialgleichung

Oil and gas discoveries

|  |  |
| --- | --- |
| 1 barrel = 159 L  Gbarrels = billions of barrels of oil equivalent | |
| # of wells | Gbarrels oil |
| 46 | 5 |
| 101 | 10 |
| 157 | 15 |
| 201 | 18 |
| 237 | 20 |
| 301 | 22,7 |
| 337 | 25 |
| 401 | 28,8 |
| 439 | 30 |
| 501 | 32,1 |
| 601 | 34,1 |
| 657 | 35 |
| 701 | 36 |
| 801 | 37,5 |
| 901 | 38,4 |
| 1001 | 39,2 |
| 1101 | 39,5 |

The data set, taken from an article in Forbes magazine, shows discovery statistics for oil and gas deposits on the continental shelf of the US by BP, the second largest petroleum producer in the world (the former British Petroleum company). The data mostly represent Gulf of Mexico deposits, and include both oil and gas; the latter has been converted to barrels of equivalent oil (1 billion cubic feet of natural gas is equivalent to 6.29 million barrels of oil). The data show discoveries of undersea petroleum and presumably include both petroleum from producing wells and proven (but untapped) reserves. The data probably exclude unproven reserves; petroleum deposits that are likely present, but have not been tested or "proven" by actual drilling.

Exploration and discovery of hydrocarbons on the Gulf of Mexico's continental shelf shows a very well behaved pattern, which may seem surprising at first. A more random pattern might be expected, given the complexity of finding oil and gas in buried (and inaccessible) undersea rocks. One might expect each successive well to hit or miss the crude oil or gas. Part of the good behavior of this graph is due to the way in which the data are being presented. The Y-axis shows the cumulative discoveries for this region, not the size of individual discoveries at each well. Because the Y-axis is cumulative, each new discovery is added to the previous, producing an ever-increasing series of discovery volumes, though obviously not at a constant rate. The volume per discovery clearly decreases with time (with number of wells drilled), presumably related to the finite nature of this resource. Early wells are typically drilled into the "fat" deposits, to generate product and revenue to cover the up-front costs of the very expensive exploration program.

Vocabulary

well: a deep hole or shaft sunk into the earth to obtain water, oil, gas, or brine.

latter: Being the second of two persons or things mentioned: Between captain and major, the latter is the higher rank.

presumably: by assuming reasonably; probably

behaved: Mathematicians (and those in related sciences) very frequently speak of whether a mathematical object – a function, a set, a space of one sort or another – is **"well-behaved"** or not.

pattern: from the French patron, is a type of theme of recurring events or objects

1 billion (USA) = 1 Milliarde (deutsch) = 109 ≈ Giga ≈ G

Aufgaben

a) Lesen Sie den Text aufmerksam durch. Stellen Sie die Daten mit dem ClassPad dar und erläutern Sie den Verlauf der Kurve.

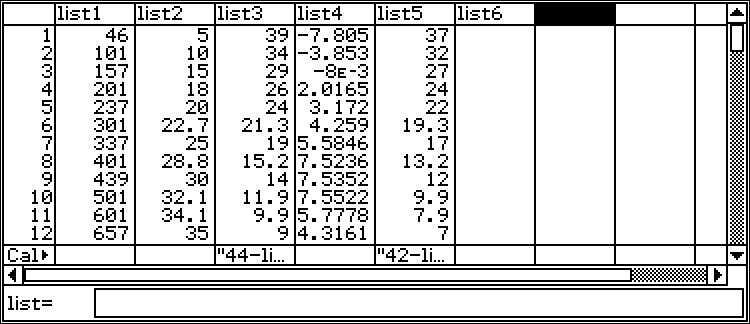
b) Beschreiben Sie den Wachstumstyp, überprüfen Sie Ihre Behauptung und bestimmen Sie einen Funktionsterm zu diesem Wachstumsvorgang.

c) Erläutern Sie, was der Verlauf des Grafen für den Sachzusammenhang bedeutet.

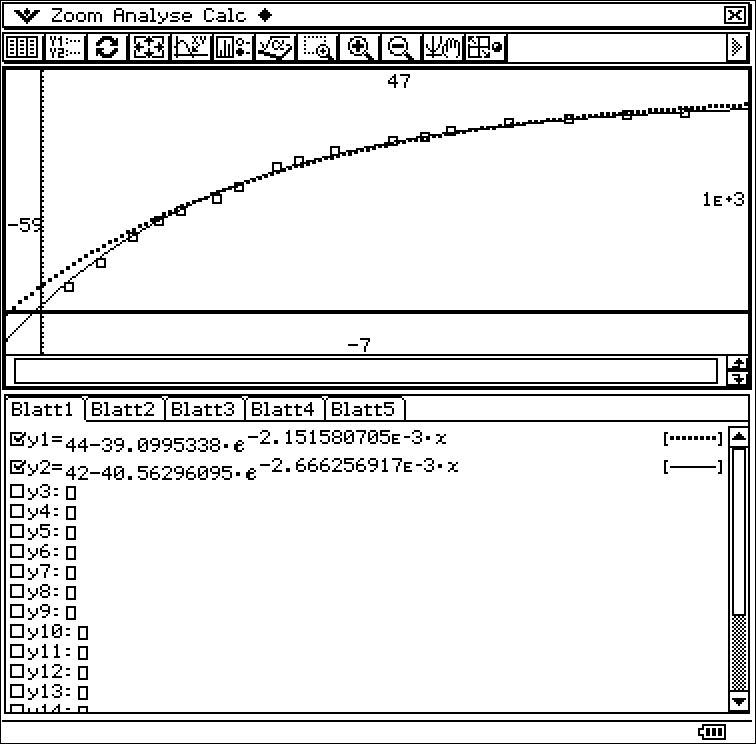
Quelle: <http://www.seattlecentral.edu/qelp/sets/064/064.html>

Lösungen: oil und gas discoveries

Daten, Annahme beschränktes Wachstum mit g = 44 bzw. g = 42



Prüfung des beschränkten Wachstums über die exponentielle Entwicklung des Abstands zur Grenze (siehe list3, list5).



Ergebnis: g = 42 passt besser zu den Daten, das wird im nächsten Schritt noch mal bestätigt.

Berechnung der Grenze:

1. Versuch





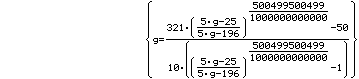


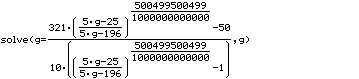
2. Versuch:













Die Regressionsfunktionen (siehe oben auch den Screenshot): über exp. Regression für g = 44



 = 44 - 39.1\*e(-2.15E-3\*x)

über exp. Regression für g = 42



 = 42-40.563\*e(-2.666 E-3\*x)

Der Verlauf muss einem beschränkten Wachstum entsprechen, weil

• die Funde kumuliert werden,

• die Ausbeuten pro Bohrung immer geringer werden und

• die Ressourcen endlich sind.

Mobilfunknutzer in China

|  |  |
| --- | --- |
| Der Anteil der Mobilfunknutzer entwickelt sich wie ein gebremstes Wachstum mit Grenze. Dazu passt eine beschreibende Funktion vom Typ f(x) = (f(0) – G) + G  mit dem Anfangswert f(0), hier der Wert von 2013; G als Grenze der Funktionswerte, hier der Wert 100 % = 1.  1. Bestimme einen Wert für r und notiere die Funktionsgleichung.  2. Als zweiten Zugang forme die Funktionsgleichung und entsprechend die Daten so um, dass eine Regressionsfunktion für eine Exponentialfunktion bestimmt werden kann und bestimme sie.  3. Vergleiche die Funktionsergebnisse untereinander und mit den empirischen Daten. | *Frankfurter Rundschau, 13.8.2018* |

Zusatz:

Eine „vollständige“ Nutzung des Mobilfunks wird in der Regel nicht mit 100 % angenommen, sondern mit z.B. 95 %. Die restlichen 5 % wollen häufig keine Mobilfunkverbindung, liegen zu weit entfernt von Zugängen oder können kein Mobilfunkgerät mehr bedienen.

Dafür wäre eine zweite Rechnung möglich mit G = 0,95….

**Bearbeitung**

1. f(0) = 0,711; G = 1

f(x) = (0,711 – 1) + 1

Ich setze die Koordinaten des letzten angegebenen Punktes (6 | 0,787) ein.

f(6) = -0,289 + 1 = 0,787

= 0,737 | ln ()

-6r = -0,305

r = 0,051

Also: f(x) = -0,289+ 1

2. g(x) = f(x) - 1 = - 0,289

h(x) = - g(x) = 0,289

Einzugebende Werte in das Regressionsfunktionsbestimmungsprogramm

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| h(x) | 0,289 | 0,26 | 0,241 | 0,227 | 0,22 | 0,215 | 0,213 |

Das Regressionsprogramm liefert: h(x) = 0,274 0,274 .

Daraus ergibt sich f(x) = -0,274 + 1.

3. Die beiden Funktionsterme unterscheiden sich kaum.

Vergleich der Werte

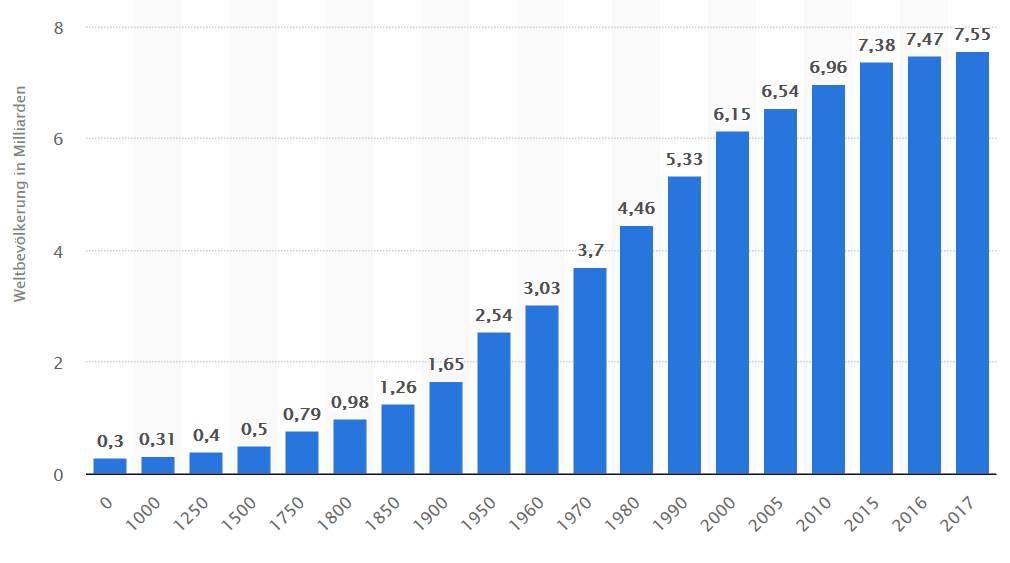
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| gegeben | 0,711 | 0,740 | 0,759 | 0,773 | 0,780 | 0,785 | 0,787 |
| f1(x) | 0,714 | 0,728 | 0,741 | 0,755 | 0,767 | 0,778 | 0,789 |
| f2(x) | 0,726 | 0,739 | 0,752 | 0,764 | 0,775 | 0,786 | 0,796 |

Die Funktionswerte von f1 liegen am Anfang (bei 0) und Ende (bei 6) über den gegebenen Werten, dazwischen darunter.

Die Funktionswerte von f2 liegen ebenfalls am Anfang (bei 0) und Ende (bei 5 und 6) über den gegebenen Werten, dazwischen darunter.

Insgesamt unterscheiden sich die berechneten Werte untereinander nur sehr wenig und sind nur wenig verschieden von den gegebenen empirischen Werten.

Entwicklung der Weltbevölkerungszahl



Am 24.2.2019 noch zu finden unter

**https://de.statista.com/statistik/daten/studie/1694/umfrage/entwicklung-der-weltbevoelkerungszahl/**

Für den Kontakt: kundenservice@statista.com

Abgebildet ist eine klassische logistische Kurve: Zu Beginn hat sie niedrige Werte und ein schwaches Wachstum. Die Zunahme wächst bis zur Trendwende (mathematisch: Wendepunkt). Ab da nimmt das Wachstum ab und geht gegen Null, die Größe nimmt noch zu und nähert sich einer Grenze.

1. Lies den Startzeitpunkt und die Bevölkerungszahl dort ab.

2. Wann etwa liegt die Trendwende und bei welcher Bevölkerungszahl?

3. Welche Zahl lässt sich als Grenze schätzen?

Aaaaber: Achte auf die Zeitachse.

4. Notiere den Kardinalfehler für statistische Darstellungen.

5. Stelle – z.B. mit Excel – die Entwicklung richtig dar.

6. Wann liegen nun die Trendwende und welche Bevölkerungsgrenze ist abschätzbar?

7. Die Daten sind sehr ungleich über die Zeit verteilt. Zum besseren Überblick über die jüngere Entwicklung stelle die Daten ab 1950 neu in einem Diagramm dar. Ist in dem Diagramm eine Trendwende (und die anschließende Rechtskurve) erkennbar?

8. Beurteile abschließend die grafische Darstellung von Statista.

**Bearbeitung**

1. Im Jahr 0 gab es etwa 300 000 Menschen auf der Erde.

2. Die Trendwende war etwa 1980 mit knapp 4,5 Milliarden Menschen erreicht.

3. Die Grenze könnte bei etwa 8 Milliarden Menschen liegen.

4. Die Zeitachse weist bei jeweils gleichen cm-Abständen Sprünge von 1000 Jahren, dann von 250 Jahren, von 50, von 10, von 5 Jahren und zum Schluss von einem Jahr auf. Das bewirkt völlig falsche Zunahmewahrnehmungen.

5.

6. Es ist keine Trendwende und auch keine obere Grenze erkennbar.

7.

Auch in dem zeitengeren Diagramm ist keine Trendwende und keine Rechtskurve erkennbar. Evtl. geht die Linkskurve in eine Gerade über.

8. Die Darstellung durch Statista verzerrt die Bevölkerungsdaten so, dass ein völlig falscher Eindruck über die weitere Entwicklung entsteht. Die unzulässig verzerrte Grafik stellt die Bevölkerungsentwicklung verharmlosend dar. Bewusst so gewollt oder nur handwerklich schlecht gemacht?

**Korrespondenz mit Statista**

1. **Mail der Schüler-innen (14.3.2019)**

Sehr geehrtes Team von Statista,

Uns ist im Matheunterricht der Münsterlandschule Tilbeck aufgefallen, dass ihre Darstellung der Statistik über die „Entwicklung der Weltbevölkerungszahl“ (<https://de.statista.com/statistik/daten/studie/1694/umfrage/entwicklung-der-weltbevoelkerungszahl/>), man könnte schon fast sagen, grober Unfug ist.

Durch die Einteilung der x-Achse (horizontal) wird vermittelt, dass der Zuwachs der Weltbevölkerung von 0 bis etwa 1970 zunimmt, dann aber deutlich kleiner wird. Nach der Darstellung könnte man annehmen, dass eine Grenze bei 8 Milliarden Menschen liegt. Doch das genaue Gegenteil ist der Fall!

Die Einteilung der x-Achse (horizontal) muss in einheitlichen Abständen eingeteilt sein, sonst wird wie bei ihrer Darstellung das Ergebnis für den Betrachter stark verfälscht.

Wir bitten freundlichst um eine Korrektur der Darstellungen, welche diesen Fehler beinhalten.

 Mit mathematischen Grüßen

Tom Linus Sterthaus und Alex Hieke im Auftrag der EF der Münsterlandschule Tilbeck

﻿Anlage: Die korrekten Darstellungen von der vorigen Seite

**Die Antwort von Statista (prompt am 14.3.2019)**

Sehr geehrter Herr Sterthaus,

vielen Dank für Ihre Nachricht.

Tatsächlich sind beide Darstellungen richtig. Da Statista die Darstellung der Grafiken nur als Säulen-/ Balkendiagramm anbietet, können wir leider keine Änderungen vornehmen.

Falls Sie noch weitere Fragen und Hinweise haben, können Sie sich gerne jederzeit bei uns melden und wünschen Ihnen mit Statista weiterhin viel Spaß im Matheunterricht.

Herzliche Grüße

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Oskar Kohnke**Sales & Marketing

1. **Mail der Schüler-innen (21.3.2019)**

Sehr geehrter Herr Kohnke!

Die einzelnen Daten im Diagramm sind richtig. Aber, wie Excel ausdrücklich und zu Recht anmerkt, darf der von Ihnen benutzte Diagrammtyp für die Darstellung einer Entwicklung in zeitlicher Abfolge nicht verwendet werden, da „die Reihenfolge der Rubriken von Bedeutung ist“.

**Zeitlich unterschiedliche Abstände grafisch in gleichen Abständen darzustellen - das ist ein Kardinalfehler der Beschreibenden Statistik,** weil jeder solchen Darstellung immer auch optisch die Änderungen pro Zeiteinheit als Steigungen entnommen werden. Und die werden falsch suggeriert.

Sie könnten leicht eine korrekte Darstellung wählen – wie in unserem ersten Anschreiben dargestellt. Ihre Mitarbeiter-innen haben vermutlich nicht gelesen, was Excel als Kommentar schreibt, und deshalb nicht gewusst, dass mit dem gewählten Diagrammtyp ein Kardinalfehler der Beschreibenden Statistik begangen wird.

Es ist manipulativ und wird häufig als Absicht unterstellt, wenn falsche durchschnittliche Zunahmen (Steigungen) grafisch suggeriert werden. Diesem Verdacht wollen Sie sich als Statistik-Lieferant doch bestimmt nicht aussetzen!

Bitte vermeiden Sie zukünftig solche Fehler durch Schulung Ihrer Mitarbeiter-innen. Die kritisierten Grafiken sollten Sie möglichst doch noch ändern! Sie stehen ja noch in ihrer manipulativen Darstellung zur Verfügung.

Mit mathematischen Grüßen

Tom Linus Sterthaus und Alex Hieke im Auftrag der EF der Münsterlandschule Tilbeck

Leider ohne Antwort trotz Mahnung (vom 10.4.2019)

# 

Energiewende



*Uwe Schneidewind (Präsident des Wuppertalinstituts für Klima, Umwelt, Energie):*

*Die Große Transformation, Frankfurt 2018, S. 193 und 194, Daten von 2016*

Versuche beide Kurven durch eine Funktionsgleichung zu beschreiben.

**Bearbeitung**

Die Lösung einer Differenzialgleichung, die auf logistisches Wachstum zielt, lässt sich so schreiben, dass sich sofort die Grenze G, die Trendwende TW und der Wachstumsfaktor w (exponentielles Wachstum für kleine f) erkennen lässt, und zwar:



**Elektrizität**

f(0) = 4,5 mit x: Jahre ab 1990; f(x) in %

G = 100

TW = 30 2016 lag der Prozentsatz zwischen 32 % und 35 %. 2020 liegt er dann geschätzt bei G/2 = 50, obwohl die Kurve eine frühere Trendwende zeigt.

f(x) =

f(0) = = 4,5 liefert w30 = – 1 bzw. w 1,107 bzw. p% = 10,7 %

f(x) =

**Gesamte Energie**

f(0) = 1,3 mit x: Jahre ab 1990; f(x) in %

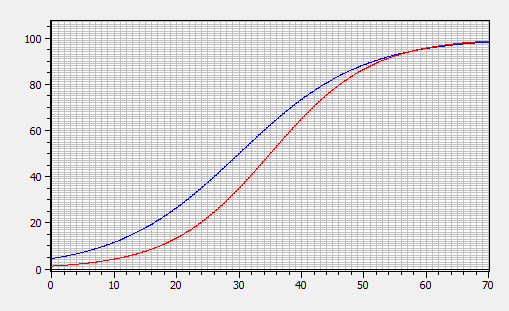
G = 100

TW = 35 2025 liegt der Wert geschätzt bei G/2 = 50.

f(x) =

f(0) = = 1,3 liefert w35 = – 1 bzw. w 1,132 bzw. p% = 13,2 %

f(x) =



1. Änderungen/Ergänzungen/Fehlerhinweise schickt bitte als e-Mail-Anhang an mued@mued.de

   **Stand: 22.10.2019** [↑](#footnote-ref-1)