



Thema des Unterrichtsbeispiels: **Beschränktes Wachstum**

Bearbeiter: Diethelm Sippel

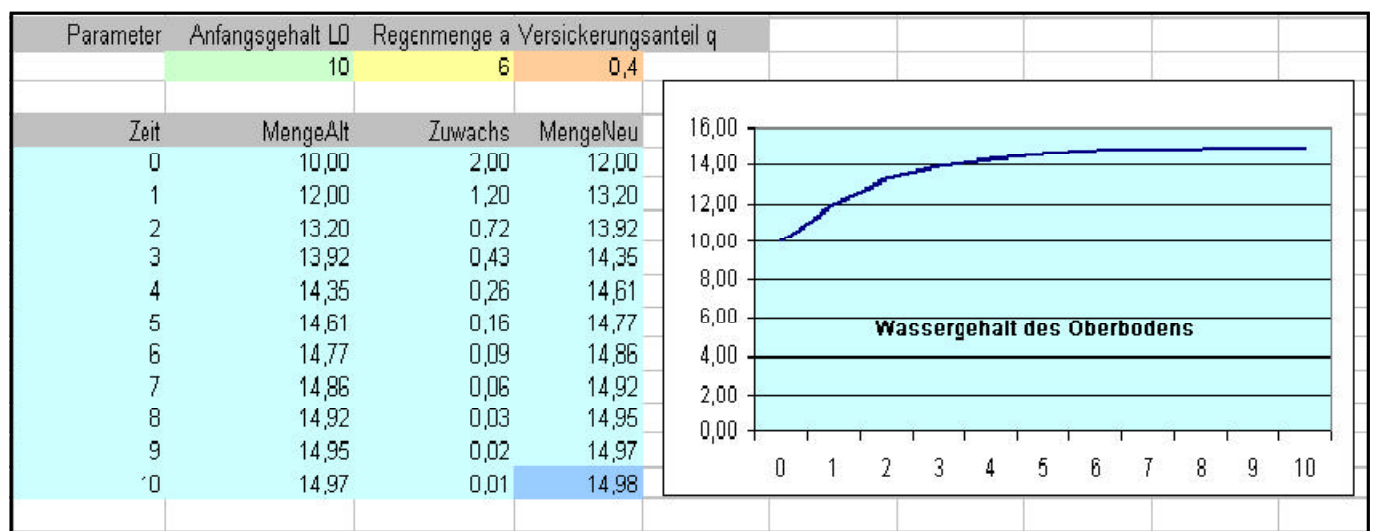
Didaktisch-methodische Aspekte

Lernfeld	Werkzeug	Unterrichtsform	Darstellung	Dokumentation
Anwendung von Exponentialfunktionen	Tabellenkalkulation	zunächst Eigenarbeit der Schüler, dann fragend-entwickelnd	tabellarisch, algebraisch	

1. Arbeitsauftrag

Die heutige Landwirtschaft ist ohne den Einsatz von Traktoren undenkbar. Leider sind moderne Trecker sehr schwer und der Landwirt kann nur dann mit ihnen aufs Feld fahren, wenn der Boden nicht zu sehr aufgeweicht ist, da ansonsten die Maschinen zu tief einsinken.

Die Befahrbarkeit eines Ackers kann durch das folgende Modell relativ leicht ermittelt werden: Wenn es regnet, dringt Wasser in die obere Bodenschicht ein und versickert von hier aus in tiefere Schichten. Die obere Bodenschicht, deren Zustand für die Befahrbarkeit ausschlaggebend ist, erhält also Zufluss durch den Niederschlag, gleichzeitig fließt aber auch durch Versickern Wasser ab, wobei die Menge des versickernden Wassers von der Bodenart abhängig ist. Wir betrachten einen Acker, bei dem zu Beginn der Beobachtungszeit $L_0 = 10$ Liter pro m^2 gespeichert sind und $q = 40\%$ pro Zeiteinheit (1Stunde) in tiefere Bodenschichten abfließen. Nun beginnt es zu regnen und zwar so, dass $a = 6$ Liter pro m^2 im Durchschnitt in einer Stunde niedergehen. Die folgende Tabelle zeigt die Entwicklung des Wassergehalts der oberen Bodenschicht für einen Zeitraum von 10 Stunden:





Man erkennt, dass sich der Wassergehalt von ursprünglich 10 l/m^2 nach Ablauf der Beobachtungszeit auf einen sogenannten Sättigungswert von 15 l/m^2 erhöht hat. Damit enthält die obere Bodenschicht dieses Ackers wegen der hohen Niederschlagsmenge am Ende mehr Wasser als zu Beginn und ist deshalb vorübergehend nicht mit Maschinen befahrbar.

- a) Ermitteln Sie, bei welchen Niederschlagsmengen a (l/Stunde) der betrachtete Acker anschließend noch mit Maschinen befahrbar ist, indem Sie den jeweiligen Wert des Parameters in das gelbe Feld der Tabelle eingeben:
 $a = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20$.
Bei welchen Niederschlagsmengen ist nach 10 Stunden mehr Wasser im Boden als zu Beginn, bei welchen Mengen weniger als zu Beginn und wann gleichviel?
- b) Wir betrachten jetzt den Einfluss von Niederschlag auf unterschiedliche Bodenarten, die zum Besitz des von uns betrachteten Landwirtes gehören. Ermitteln Sie, welche Böden nach einer 10-stündigen Niederschlagsdauer von $a = 5 \text{ l/m}^2$ noch mit Maschinen befahrbar sind, indem Sie den jeweiligen Wert für q in das rote Feld der Tabelle eingeben:
Sand ($q = 0,7$); lehmiger Sand ($q = 0,6$); Lehm ($q = 0,5$); Schwarzerde ($q = 0,4$); Löss ($q = 0,3$).
- c) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus a) und b) und versuchen Sie herauszufinden, wie der sogenannte Sättigungswert von den Größen a und q abhängt. Hinweis: Legen Sie eine Tabelle an! Untersuchen Sie, ob der Anfangsgehalt L_0 einen Einfluss auf den Sättigungswert hat.

Wir wollen jetzt die heuristisch ermittelten Ergebnisse aus dem ersten Teil theoretisch absichern. Betrachtet man die Tabelle, so erkennt man folgenden Zusammenhang zwischen den Größen in jeder Zeile:

$$\text{MengeNeu} = \text{MengeAlt} + \text{Zuwachs}$$

Berücksichtigt man die Aufgabenstellung, dann lässt sich der Zuwachs durch die Gleichung $\text{Zuwachs} = a - q\text{MengeAlt}$ beschreiben.



- e) Entwickeln Sie aus diesen Angaben die Iterationsgleichung, die dem allgemeinen diskreten Modell für beschränktes Wachstum entspricht: $\text{MengeNeu} = \text{MengeAlt} + q(G - \text{MengeAlt})$, wobei q der Wachstumsfaktor und G die obere Grenze des Wachstums ist. Welche Größe ergibt sich hieraus für den Sättigungswert? Vergleichen Sie mit Teilaufgabe c) aus dem ersten Aufgabenteil.
- f) Erstellen Sie mit Hilfe der in a) ermittelten Iterationsvorschrift eine Excel-Tabelle einschließlich Diagramm für die Parameter $L_0 = 5 \text{ l/m}^2$, $a = 5 \text{ l/Stunde}$, $Q = 35\%$ (0,35).
- g) Die DGL $y'(x) = k(G - y(x))$ mit $y(0) = y_0$ ist ein stetiges Modell für beschränktes Wachstum. Passen Sie die Problemstellung dieser DGL an und ermitteln Sie deren Lösung. Interpretieren Sie die DGL und stellen Sie die Lösungsfunktion graphisch dar.



2. Beschreibung der Einheit

Notwendige Vorkenntnisse

Grundlagen von Algebra und Funktionenlehre sind unabdingbar. Die Interpretation und Lösung von Differentialgleichungen setzt solide Kenntnisse von Differential- und Integralrechnung voraus. So könnte die Problemstellung im Zusammenhang mit der Untersuchung von Exponential- und Logarithmusfunktionen behandelt werden. Für die Nutzung der Tabellenkalkulation sollten die Schülerinnen und Schüler die Eingabe von Daten, die Erstellung von Formeln einschließlich der Verwendung relativer und absoluter Bezüge sowie die Erstellung von Diagrammen beherrschen.

Ziel der Einheit

Viele Schülerinnen und Schüler beherrschen nach Abschluss der Analysis zwar deren formales Kalkül, welche Anwendungsmöglichkeiten sich aber mit diesem Kalkül erschließen, bleibt leider häufig unbekannt und trägt dazu bei, die Mathematik als leblose Ansammlung formaler Beziehungen zu erfahren, die man nach Beendigung der Schulzeit schnell vergessen kann. Problemstellungen wie die oben vorgestellte können dazu beitragen, das Bild von der Mathematik zu verändern. Konkret geübt werden die Entdeckung von Gesetzmäßigkeiten, die zur Bildung von Modellen zur Beschreibung realer Situationen führen sowie die Interpretation solcher Gesetzmäßigkeiten. Anhand des vorgestellten Beispiels wird deutlich, wozu Differenzen- und Differentialgleichungen im Zusammenhang mit e- und ln-Funktion genutzt werden können.

Funktion des Werkzeugs

Neben der Funktion der tabellarischen und graphischen Darstellung verstärkt die Tabellenkalkulation die Konzentration auf die eigentliche Problemstellung, indem das Rechnen dem Programm überlassen wird. Zudem ermöglicht das Werkzeug einen experimentellen Einstieg in die Problemstellung, ohne dass der darunterliegende Algorithmus als Voraussetzung für weitere Überlegungen schon am Anfang entwickelt werden muss. Aus dem Einsatz des Modells als Blackbox ergibt sich vielmehr die Motivation, die verborgenen Gesetzmäßigkeiten zu entdecken und weiterzuentwickeln.

Arbeitsdauer

2 - 3 Unterrichtsstunden

Unterrichtsorganisation

Nach der Vorstellung des Problems können die Schüler in Eigen- oder Partnerarbeit die gestellten Aufgaben mit Hilfe des Werkzeugs Tabellenkalkulation bearbeiten und dabei Vermutungen über mögliche Gesetzmäßigkeiten aufstellen. Die Erarbeitung des Modells und die Interpretation und Lösung der Differentialgleichung wird nur im gemeinsamen Unterrichtsgespräch möglich sein. Die Umsetzung der erarbeiteten Modelle in eigene Tabellen und Diagramme kann dann wieder in Eigen- oder Partnerarbeit durchgeführt werden.



Lösungsskizze

Erster Aufgabenteil

a) $q = 0,4$

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
S*	0,0	2,5	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0	22,5	25,0	27,5	30,0	32,5	35,0	37,5	40,0	42,5	45,0	47,5	50,0
+																					
+/-	-	-	-	-	+/-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
-**																					
b***	ja	ja	ja	ja	ja	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein
S*: Sättigungswert																					
+, +/-, -: mehr, gleichviel, weniger Wasser als zu Beginn																					
b***: befahrbar																					

b) $a = 5 \text{ l/m}^2$

q	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
S*	7,15	8,33	10	12,5	16,6
+					
+/-	-	-	+/-	+	+
-**					
b***	ja	ja	ja	nein	nein
S*: Sättigungswert					
+, +/-, -: mehr, gleichviel, weniger Wasser als zu Beginn					
b***: befahrbar					

c) Die Ergebnisse aus a) und b) lassen folgenden Zusammenhang vermuten:

$$\text{Sättigungswert} = a/q$$

Der Anfangsgehalt L_0 hat offensichtlich keinen Einfluss auf den Sättigungswert. L_0

beeinflusst lediglich die Geschwindigkeit, mit der der Sättigungswert im Boden erreicht wird.

Zweiter Aufgabenteil

d) $\text{MengeNeu} = \text{MengeAlt} + \text{Zuwachs}$

$$= \text{MengeAlt} + a - q \cdot \text{MengeAlt}$$

$$= \text{MengeAlt} + q(a/q - \text{MengeAlt})$$

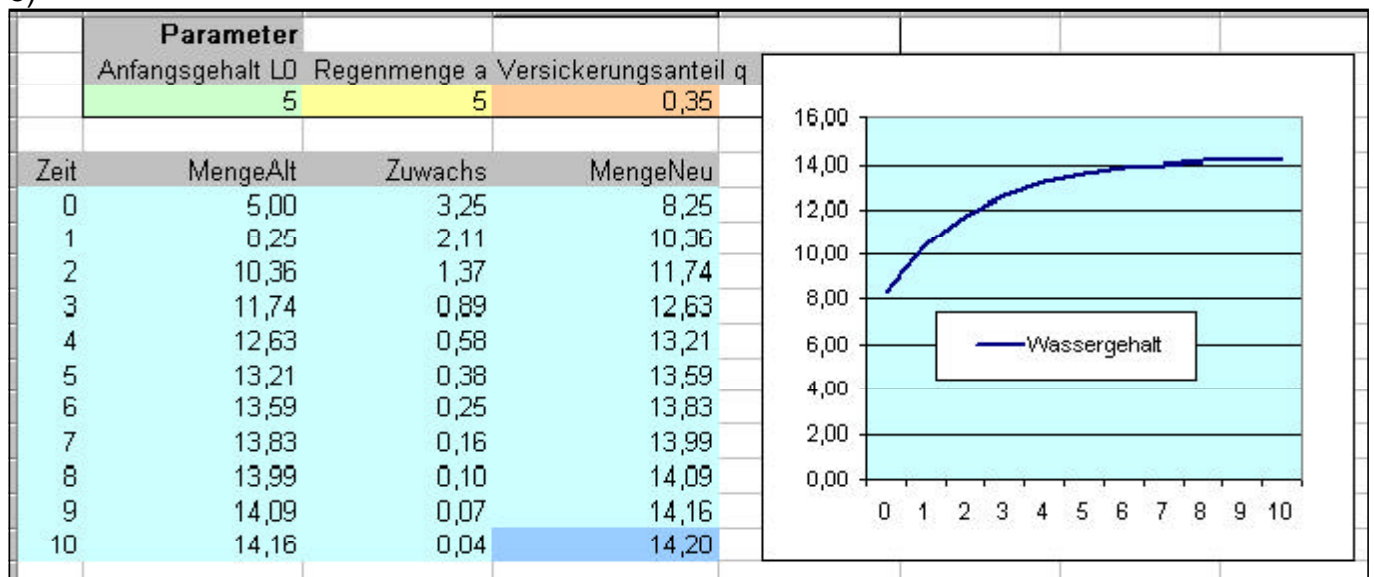
Dies entspricht der allgemeinen Form der Differenzengleichung (iteratives Modell) für beschränktes Wachstum:

$$\text{MengeNeu} = \text{MengeAlt} + q(G - \text{MengeAlt}),$$

wobei q der Wachstumsfaktor und G die obere Grenze des Wachstums ist. Demnach ist der Sättigungswert gegeben durch den Quotienten a/q .



e)



	A	B	C	D
9		Parameter		
10		Anfangsgehalt L_0	Regenmenge a	Versickerungsanteil q
11		5	5	0,35
12				
13	Zeit	MengeAlt	Zuwachs	MengeNeu
14	0	=B11	=\$C\$11-\$D\$11*B14	=B14+C14
15	=A14+1	=D14	=\$C\$11-\$D\$11*B15	=B15+C15
16	=A15+1	=D15	=\$C\$11-\$D\$11*B16	=B16+C16
17	=A16+1	=D16	=\$C\$11-\$D\$11*B17	=B17+C17
18	=A17+1	=D17	=\$C\$11-\$D\$11*B18	=B18+C18
19	=A18+1	=D18	=\$C\$11-\$D\$11*B19	=B19+C19
20	=A19+1	=D19	=\$C\$11-\$D\$11*B20	=B20+C20
21	=A20+1	=D20	=\$C\$11-\$D\$11*B21	=B21+C21
22	=A21+1	=D21	=\$C\$11-\$D\$11*B22	=B22+C22
23	=A22+1	=D22	=\$C\$11-\$D\$11*B23	=B23+C23
24	=A23+1	=D23	=\$C\$11-\$D\$11*B24	=B24+C24



f)

$$LO = 5; a = 5; q = 0,35; G = a/q = 5/0,35 = 100/7$$

$$y'(x) = k(G - y(x)) \text{ mit } y(0) = 5 \text{ und } y(1) = 8,25 = 33/4$$

$$\frac{y'(x)}{G - y(x)} = k \Rightarrow -\frac{y'(x)}{G - y(x)} = -k$$

$$\int -\frac{y'(x)}{G - y(x)} = \int -k dx$$

$$\ln(G - y(x)) = -kx + c$$

$$G - y(x) = e^{-kx+c} = te^{-kx} \text{ mit } t = e^c$$

$$y(x) = G - te^{-kx}$$

$$y(0) = 5 = 100/7 - te^0 \Rightarrow 100/7 - 5 = 65/7$$

$$\Rightarrow y(x) = 100/7 - 65/7 e^{-kx}$$

$$y(1) = 8,25 \Rightarrow 8,25 = 100/7 - 65/7 e^{-k}$$

$$e^{-k} = 169 \cdot 7 / 28 \cdot 65 = 13/20 \Rightarrow k = -\ln(13/20) \approx 0,431$$

$$\Rightarrow y(x) = 100/7 - 65/7 e^{-0,431x}$$

3. Ergänzungen und Ausblicke

Für die Behandlung des beschränkten Wachstums gibt es noch zahlreiche weitere interessante Problemstellungen. Exemplarisch soll hier noch ein Beispiel vorgestellt werden, das ebenfalls mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogrammes gelöst werden kann. Allgemein lässt sich feststellen, dass Fragestellungen dieser Art im Kontext mit der Behandlung von Exponential- und Logarithmusfunktionen unter dem Stichwort Wachstumsprozesse behandelt werden können. Besonders sinnvoll ist es, wenn dann zwischen linearem, exponentiellem, beschränktem und logistischem Wachstum unterschieden wird und die Bedeutung dieser unterschiedlichen Modelle herausgearbeitet wird.



Einem Patienten wird durch eine Dauertropfinfusion ein (bis dahin im Körper nicht vorhandenes) Medikament verabreicht. Dabei gelangt jede Minute eine gleichbleibende Menge von 5 mg des Medikaments ins Blut. Das dort angereicherte Medikament wird über die Nieren wieder ausgeschieden; die Ausscheidungsmenge pro Minute beträgt 5 % der jeweils im Blut vorhandenen Menge des Medikamentes.



- a) Erläutern Sie, dass sich die Menge $y(x)$ des Medikamentes im Blut nach x Minuten durch das folgende Anfangswertproblem beschreiben lässt:
(*) $y'(x) = 5 - 0,05y(x)$ mit $y(0) = 0$.
Zeigen Sie, dass es sich bei (*) um eine DGL des beschränkten Wachstums handelt und ermitteln Sie eine Lösung des AWP (*).
- b) Entwickeln Sie ein iteratives Modell zur Beschreibung der Dauertropfinfusion und berechnen Sie die Entwicklung der Konzentration für einen Zeitraum von 120 Minuten. Stellen Sie die Berechnungen graphisch dar. Wie hoch ist die langfristige Konzentration des Medikaments im Blut?
- c) Nach 30 Minuten löst sich unbemerkt die Infusionsnadel, so dass das Medikament nicht mehr in die Blutbahn gelangen kann. Dieses Missgeschick wird erst nach weiteren 30 Minuten entdeckt. Welche Auswirkungen hat das auf die Konzentration des Medikaments im Blut? Was kann man tun, um innerhalb von 30 Minuten 95 % des langfristigen Medikamentenspiegels im Blut zu erreichen?
- d) Ein anderer Patient hat von einer früheren Infusion noch 20 mg des Medikamentes im Blut. Deshalb wird bei ihm die Infusionsrate von 5 mg um 1 % pro Minute gesenkt. Ermitteln Sie mit Hilfe eines Iterationsverfahrens, ob bei diesem Patienten auf diese Art und Weise der gleiche Medikamentenspiegel wie sonst auch erreicht wird. Stellen sie die Berechnungen stets graphisch dar.

4. Literaturhinweise

Günther Dopfer / Rolf Reimer
Tabellenkalkulation im Mathematikunterricht
Ernst Klett Schulbuchverlag
Stuttgart

Frank Giordano / Maurice Weir
Differential Equations - A modeling Approach
Addison-Wesley Publishing Company
Reading Massachusetts