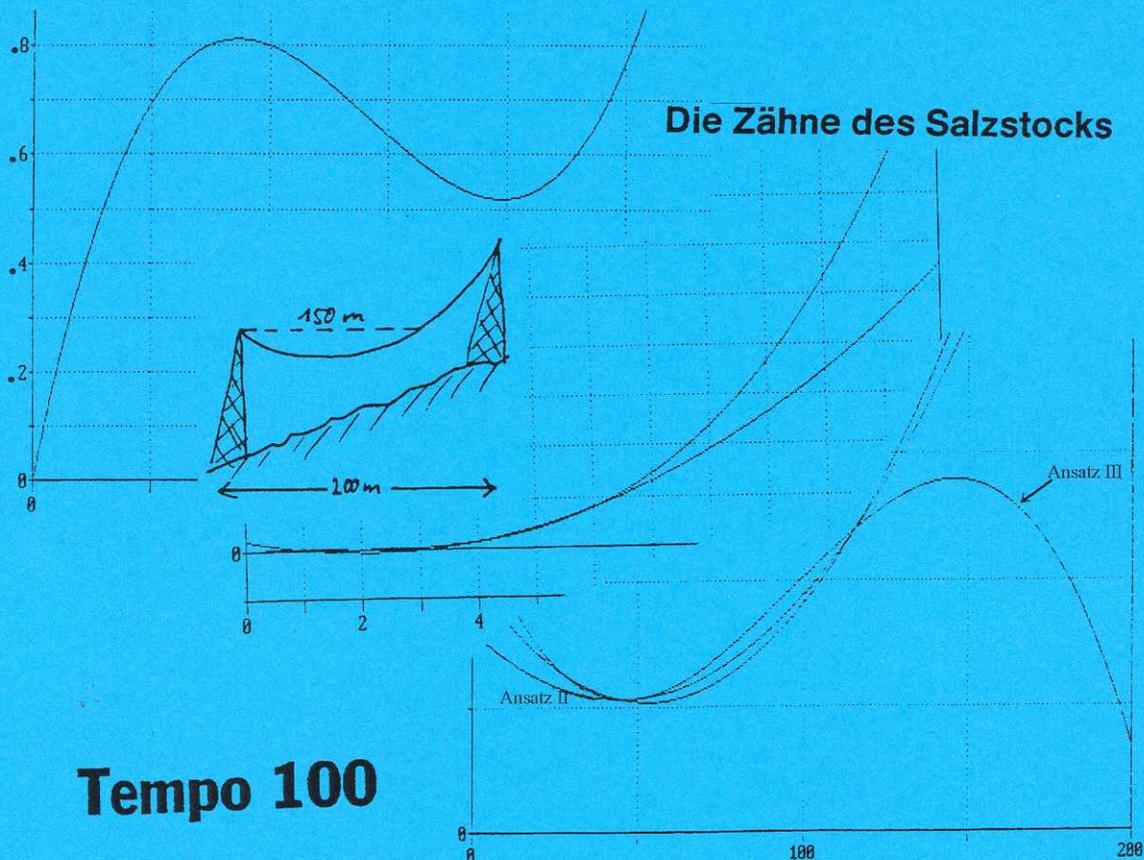


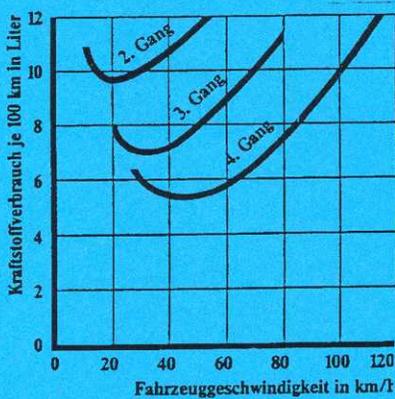
Inter- und Extrapolationen

mittels

Funktionsbestimmung durch Punktkoordinaten



Tempo 100



Eine Unterrichtsreihe zur Funktionenlehre und zur Modellbildung
an Themen aus den Bereichen Energie, Verkehr, Ökologie
mit integrierter Wiederholung von Sek. I-Stoff

Inhaltsverzeichnis

0. Vorweg	3
Worum es in der Reihe geht	3
Vorgehen bei einer Funktionsbestimmung aus Punktkoordinaten	4
Kurskonzept 11.1: Beschreibungen, Folgerungen, Interpretationen von Datenmengen	5
Benutzungshinweise	7
1. Freileitungen (Kabelabstand vom Boden)	8
Rhein-Main-Donau-Kanal	8
Masten in der Bergwelt	10
Das Invarianzprinzip	15
SIEMENS	16
2. Kühlschränke (Eisschichtdicke und Stromverbrauch)	18
Ansatz: Polynom 2. Grades	18
Ansatz: Polynom 3. Grades	20
Klausur mit geänderten Werten	21
3. Tempolimit (Stickoxidminderung durch Tempolimit)	24
Ansatz: Polynom 2. Grades	24
Ansatz: Polynom 3. Grades	26
Zusammenfassung, Neuere Zahlen, Kommentar, Literatur	28
4. Die Zähne des Salzstocks (Atommüllentwicklung)	30
Ansatz: Polynom 2. und 3. Grades	30
Aktuelle Daten zu deutschem und weltweitem Atommüll	36
5. Benzinverbrauch und Geschwindigkeit	38
Ansatz: Polynom 2. u. 3. Grades, auch als Scheitelpunktform	38
Einsparungen	41
6. Erdgas (Kostenentwicklung und Bohrtiefe)	42
Polynom 2. und 3. Grades (Klausur)	42
Herleitung des Polynoms 2. Grades und Vergleich der Ansätze	45
Problematisierung des Polynoms 3. Grades	46
7. Mängelhäufigkeit von Autos (und ihr Alter)	48
Ansatz: Polynom 3. Grades und Prognoseproblematik	48
Informationen zu Rost am Auto	50
Resümee	51

Inter- und Extrapolationen
4. überarbeitete Auflage 2005

ISBN 978-3-930197-21-7 - € 12,50

Copyright bei den Autor/innen

Vervielfältigung für schulische Zwecke erlaubt.

0. Vorweg

Worum es in der Reihe geht

In der gesamten Reihe 'Funktionsbestimmung durch Punktkoordinaten' geht es

I. mathematisch direkt um:

- * Polynomfunktionen 2. und 3. Grades,
- * deren Graphen,
- * die Bestimmung von Nullstellen und Extrempunkten quadratischer Funktionen,
- * Lösen quadratischer Gleichungen,
- * den Umgang mit Computer-Funktionen-Plotter-Systemen,
- * das Aufstellen von Gleichungssystemen aus Bedingungen,
- * das Lösen von Gleichungssystemen mit 3 und 4 Variablen,
- * die Prüfung von Funktionslösungen auf Angemessenheit,
- * die Erweiterung von Lösungsansätzen, falls nötig.

II. inhaltlich um relevante Probleme aus den Bereichen Energie, Verkehr und Ökologie.

III. wissenschaftlich um

- * das Hin und Her zwischen Problem und mathematischem Modell,
- * Modellbildungsprozesse.

IV. für die Sek. II um

- * eine integrierte Wiederholung von Sek.I-Stoff auf höherem Niveau,
- * die Vorbereitung der Analysis durch die Untersuchung verschiedener Funktionstypen, das Einüben des Verfahrens zur Funktionsbestimmung aus 'Rand'bedingungen.

V. in der mathematischen Reflexion um

- * die Wahrnehmung der Möglichkeit numerischer Inter- und Extrapolation,
- * die Einsicht in die Notwendigkeit, berechnete(!) Ergebnisse noch auf Plausibilität und Problemangemessenheit zu prüfen,
- * einen Überblick über die Graphenverläufe zu Polynomfunktionen,
- * die Einsicht, dass Polynomfunktionen zu bestimmten Graphenverläufen prinzipiell nicht passen,
- * die Motivation, sich neue Funktionstypen und deren Grapheneigenschaften anzusehen,
- * die Einsicht, dass Funktionsansätze aus einem inhaltlichen Bezug heraus gewählt werden müssen, wenn das Ergebnis verlässlich sein soll.

Beispiel 1 ist mathematisch zu fassen. Beispiel 2 lässt sich korrigieren. In Beispiel 3 und 4 klappt die benötigte Extrapolation. Beispiel 5 ist mit dem einen Ansatz bearbeitbar, mit dem anderen nicht.

In Beispiel 6 sind beide Ansätze problematisch. Spätestens mit Beispiel 7 ist klar, dass der Funktionsvorrat (hier Polynome) für die Bearbeitung des Problems nicht geeignet ist.

Besser ist prinzipiell: es liegt ein inhaltlich begründeter (mathematisierbarer) Zusammenhang vor, der zur Sache passt und den Punktedaten werden durch Regression die Koeffizienten des Funktionstyps angepasst.

Stelle und Stellenwert der Inter- und Extrapolationen im
**Kurskonzept 11.1: Beschreibungen, Folgerungen,
Interpretationen von Datenmengen**

Beschreibende Statistik

- Die Termini der Beschreibenden Statistik werden in einer Doppelstunde kurz vorgestellt. Eigenständig wiederholen die Schüler/innen an mehreren Beispielen diesen Sek.I-Stoff oder lernen ihn kurzerhand neu anhand einer schriftlichen Zusammenfassung.
- Als Mittel der Explorativen Datenanalyse wird das Boxplot eingeführt. Damit lassen sich schnell Datenmengen charakterisieren und vergleichend bewerten.
- Das Simpsonsche Paradoxon zeigt exemplarisch, dass sich trotz richtiger Rechnung (mit relativen Häufigkeiten) Widersprüchliches ergeben kann. Durch Berücksichtigung von Gewichtungsfaktoren (Anteile von Anteilen) lässt sich das Phänomen aber aufklären.
- Parallel zu den 3 Themengebieten laufen Vorträge von Schüler/innen zu Manipulationen durch Diagramme: jede/r Schüler/in hält einen Kurzvortrag nach einer gemeinsam erstellten Kriterienliste für gute Vorträge.
* Zeitlicher Schwerpunkt: Boxplot, Simpson, Schüler/innen-Vorträge.

Lineare und quadratische Funktionen

- Die Wiederholung des formalen Umgangs mit linearen Funktionen (als Vorbereitung auf die Regression unten) wird ganz in die Hände der Schüler/innen gelegt. Sie endet mit einer terminlich angekündigten Fragestunde und einem Kurztest. Für die Wiederholungsarbeit steht den Schüler/innen wieder (s. Termini der Beschreibenden Statistik) schriftliches Material zur Verfügung.
- Anwendungen linearer Funktionen werden mit der Jigsaw-Methode im Unterricht behandelt.
- Der Zusammenhang von Graphen und Termen quadratischer Funktionen (als Vorbereitung auf die Inter- und Extrapolation) wird von den Schüler/innen am PC systematisch erfasst und nach einer Fragestunde in einem Kurztest abgefragt.
* Dieses Kapitel kurz halten: 3 bis 4 Stunden Anwendungen linearer und nur ebenso lange quadratische Funktionen (inklusive Tests).
Vorsicht: Bei besonderen Schwierigkeiten keine 1/4-Jahres-Sek.I-Stoff-Trimphase einlegen zur "grundsätzlichen" Wiederholung. Das wird für die Schüler/innen öde und langweilig. Sie lernen den Stoff wie schon in der Sek.I so nicht. Besser ist es, Defizite dort aufzugreifen, wo sie auftauchen, und in dem Umfang, der an dieser Stelle nötig ist. Und die Eigenarbeit der Schüler/innen herausfordern!

Polynome zweiten und dritten Grades – Inter- und Extrapolationen

- a) Bestimmung quadratischer Funktionen aus gegebenen Punkten und ihre Diskussion am Thema "Kabeldurchhang".
Dabei: allgemeine quadratische Funktion, "Aussagen" der Graphen, Symmetrieeigenschaft, Wahl des Koordinatensystems, mehrere Gleichungen mit mehreren Variablen – zur numerischen Interpolation, Extremumsbestimmung, Skizzen; Ausblick auf die Analysis: cosh-Funktion als "Kettenfunktion".
- b) Numerische Interpolation und Extrapolation durch Polynome 2. und 3. Grades; es sind jeweils 3 Wertepaare aus Zeitungsartikeln bekannt, als 4. Punkt liegt i. d. R. der Nullpunkt von der Sache her nahe – Themen: "Öfter mal abtauen" (Strommehrbedarf in Abhängigkeit von der Eisschichtdicke), "Durch Tempolimit Schadstoffausstoß drosseln" (Stickoxidausstoß in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit), "Die Zähne des Salzstocks" (Atommüllmengen-Entwicklung), "Rechtzeitig schalten" (Benzinverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit in jedem Gang), "Mehr Erdgas"

(Kosten in Abhängigkeit von der Bohrtiefe), "Noten für Autos" (Auto-Mängel-Häufigkeit in Abhängigkeit vom Alter).

Dabei: allgemeine Polynomfunktion, Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen, Inter- und Extrapolation, Gleichungssysteme mit mehreren Variablen und mit realistisch "krummen" Koeffizienten, Koordinatentransformation, Taschenrechner-Übungen; Diskussion von Polynomen 2. und 3. Grades: Symmetrie, Monotonie, Verhalten für große und kleine Argumente, Nullstellen, Prüfung im Sachzusammenhang.

- c) Ausblick: präzise Ermittlung von hier unerwünschten Extrema und Wendepunkten in der Analysis; kurze Diskussion der Funktionstyp-Eigenschaften zu $f(x) = x^n$ und $g(x) = x^{-n}$ als Mittel für in 'b' schlecht inter- und extrapolierte Zusammenhänge.

Schwerpunkt: Wahl eines geeigneten mathematischen Modells (Lage des Koordinatensystems, Typ der Polynomfunktion) zur Inter- und Extrapolation; Prüfung der Ergebnisse im Anwendungszusammenhang; ggf. Problematisierung und Modellverfeinerung (z. B. weitere plausible Punkte berücksichtigen); Resümee: neue, inhaltlich begründete (!) Funktionstypen gesucht.

Zusammenhang nach oben und unten:

Das allererste Problem der Analysis ist, dass zu untersuchende ("Funktions-")-Zusammenhänge nicht als Funktionsterme gegeben sind. I. d. R. sind einzelne Werte gegeben. Die nebenbei erfolgende oder explizit gewollte Interpolation und Extrapolation durch einen Funktionsterm ist ein eigenständiges Problem. Das Bestimmen von linearen Funktionen, deren Graph durch 2 Punkte geht (s. o.), wird hier fortgesetzt zur Bestimmung von Polynomen 2. und 3. Grades, deren Graphen durch 3 bzw. 4 vorgegebene Punkte verläuft. In der Analysis wird die Problematik fortgesetzt in der Funktionsbestimmung – **dem** Kapitel, das dem Unterricht bei PC-Einsatz als Schwerpunkt bleibt im Gegensatz zur Kurvendiskussion: dort werden Forderungen an den Graphen gestellt, die mit analytischen Mitteln zum Funktionsterm führen.

Beschreibende Statistik II: Regression und Korrelation

- Die Ursprungsgerade als Regressionsfunktion wird hergeleitet. Dazu ist der Rückgriff auf die Summen der quadratischen Abweichungen aus der Beschreibenden Statistik I, die Scheitelpunktbestimmung quadratischer Funktionen aus der Inter- und Extrapolation und Wissen zu linearen Funktionen aus der eigenständigen Wiederholungsarbeit nötig.
- Die lineare Regressionsfunktion und der Korrelationskoeffizient schließen sich an. Nach mehreren Rechnungen von Hand greift man auf PC-Programme zurück, die die Von-Hand-Rechnungsergebnisse auch überprüfen lassen.
- In den Naturwissenschaften werden häufig auch nicht-lineare Zusammenhänge durch Datenmengen empirisch erfasst. Zur Funktionsbestimmung sind die Daten zu linearisieren, ist die Regressionsgerade zu bestimmen und sind durch Resubstitution die optimalen Koeffizienten zu errechnen.

Der inhaltliche Zusammenhang

Insgesamt werden in der Beschreibenden Statistik I Datenmengen durch Einzelwerte und Abweichungsmaße charakterisiert. Verteilungen lassen sich untereinander vergleichen, aber es sind kaum Entwicklungen vorhersagbar.

In der Inter- und Extrapolation werden Einzelpunkte zu Funktionsverläufen "verbunden", um Aussagen über Entwicklungen machen zu können. Sobald man viele Datenpunkte hat, funktioniert das Rechenverfahren für Prognosen nicht mehr.

Mit der Regression werden beide Zugänge zusammengeführt: Viele Datenpunkte werden durch Funktionsterme beschrieben um inter- und extrapolieren zu können.

Die Wiederholungsarbeit

- Lineare Zusammenhänge kommen mehrfach vor und geben jeweils Gelegenheit, ein kurzes Stück problemnah zu wiederholen: Schüler/innen-Vorträge zur Manipulation in Diagrammen, eigenständige Wiederholung, Jigsaw-Anwendungen, Inter- und Extrapolation (F3/F5, M3), Regression.
- Quadratische Zusammenhänge: Schüler/innen-Vorträge, Graphen/Terme am PC, Inter-/Extrapolation, Regression
- Lösen von Gleichungssystemen: eigene Wiederholung linearer Funktionen, zentral in der Inter- und Extrapolation
- Prozentrechnung: Schüler/innen-Vorträge, Simpson, Inter-/Extrapolation (F3/F5-Hangsteigung; K1 – Funktionswahl und Ergebnisinterpretation; T1, B4, G3 – Größenänderungen; M1 – prinzipielle Problematik der Prozentsatzgröße)
- Quadratische Gleichungen: Inter-/Extrapolation (F6, K4/Aufgabe 1, Z4, B1, G1). Nebenbei: Für die Scheitelpunktbestimmung ist keine Scheitelpunktform nötig und sinnvoll. Der x-Wert x_s liegt genau zwischen den sowieso zu bestimmenden Nullstellen. $x_s = -\frac{p}{2}$ (in der p-q-Formel) gilt immer auch bei imaginären Nullstellen, s. F5.

Benutzungshinweise

Die Seiten mit Kasten (wie S. 4 und 9) sind für die Hand der Schüler/innen gedacht. Die anderen zeigen Lösungen, Unterrichtshinweise, Tipps, Kommentare und Zusammenfassungen.

Ich habe i. d. R. alle Beispiele in der hier aufgeführten Reihenfolge bearbeiten lassen, z. T. in Vorträgen von Schüler/innen, z. T. in "normalen" Hausaufgaben, z. T. in Wochenhausaufgaben.

Nach einigen Rechnungen von Hand lassen sich die weiteren Beispiele auch – rechen-technisch kurz und schnell – mit dem PC-Programm MATHEASS bearbeiten: Koeffizientenbestimmung und Graphenausdruck (Punkt 7 und 10 von S. 4). Die Mathematisierungsschritte und die Interpretation und ggf. Korrektur der Mathematisierung rücken mehr ins Zentrum der Arbeit, wenn langwierige Rechenarbeit vom PC erledigt wird.

Klausur mit geänderten Werten

Machen Sie aus Ihrem Kühl- und Gefriergerät keinen Iglu

Sowohl Kühl- als auch Gefriergeräte sollten nur kurzzeitig zur Entnahme der Speisen geöffnet werden, um sie gleich darauf wieder zu schließen. Damit wird verhindert, dass zu viel wärmere Außenluft in die Kühl- bzw. Gefrierfächer eindringt und sich Kondenswasser bildet, das sich als Vereisung niederschlägt.

Diese Vereisung sollten Sie besonders im Auge behalten. Denn sie kühlt nicht etwa zusätzlich, sondern bewirkt genau das Gegenteil. Die Eisschicht bildet eine Isolierung, die den Kühl- bzw. Gefriervorgang behindert. Sie bewirkt also genau das, was Eskimos durch den Bau von Eishütten (Iglus) erreichen, nämlich Schutz vor Kälte.

Tauen Sie daher regelmäßig Ihre Kühl- und Gefriergeräte ab, das spart Stromkosten.

*Bundesministerium für Wirtschaft
Haushalten im Haushalt
– Energiespartipps*

Ein loser Reifansatz an den Innenwänden von Tiefkühltruhen und -schränken ist unvermeidlich. Völlig luftdicht kann auch das beste Gerät nicht abgeschlossen werden. Von Zeit zu Zeit muss es deshalb enteist werden.

Dies empfiehlt sich – ja, wird sogar dringend nötig – wenn die Eisbildung etwa 5 mm dick ist, da sonst wesentlich mehr Strom verbraucht wird: bei 3 mm Reifansatz – 10 Prozent mehr Strom, bei 5 mm Reifansatz – 30 Prozent mehr Strom, bei 10 mm Reifansatz – 75 Prozent mehr Strom. Der zusätzliche Energieverbrauch ist dadurch bedingt, dass die Eisschicht isolierend wirkt – wie z. B. auch der Iglu der Eskimos.

Öfter mal abtauen !

Klausur Nr. 2 – Jahrgangsstufe 11.1 –

Lesen Sie sich in aller Ruhe den Artikel durch.

Wenn Sie Ihren Kühlschrank als Iglu betreiben, dann zahlen Sie ganz schön drauf! Wie viel bei welcher Eis-"Schutz"-Dicke, das kann man mit Hilfe der Daten aus dem Artikel numerisch interpolieren und extrapolieren!

Aufgabe 1

- a) Notieren Sie die Angaben im Artikel zu Eisdicke und Strommehrbedarf als Punkte-Koordinaten.
Einheiten der Eisdicke: mm.
Einheiten des Strommehrbedarfs: %.
- b) Im ersten Anlauf (Polynom 2. Grades) habe ich nach langen Rechnungen herausbekommen:
 $f(x) = -0,14x^2 + 11,14x - 22,13$.
Um dieses Ergebnis würdigen zu können:
Skizzieren Sie den Graphen zu dieser Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem. Bestimmen Sie dazu vorher: die Nullstellen, den Scheitelpunkt, den Schnittpunkt mit der y-Achse.
(Hinweis: der Graph geht auch durch die 3 Punkte aus 1a.)
- c) Beurteilen Sie diesen Funktionsansatz für das gegebene Sachproblem. Bitte einige Sätze, die im Detail kritisieren.

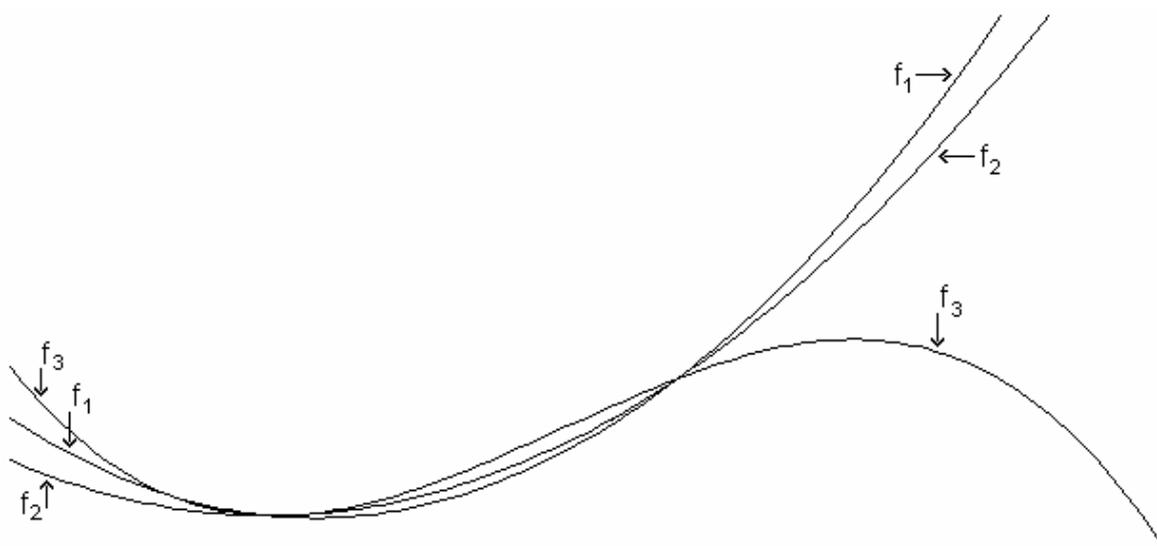
Aufgabe 2

Nach dem 1. folgt ein 2. Versuch:

- a) Nehmen Sie einen weiteren Punkt auf. Begründen Sie – inwiefern er von der Sache her nahe liegt.
– inwiefern er einen Fehler des 1. Ansatzes behebt.
- b) Machen Sie einen neuen Funktionsansatz. Bestimmen Sie die 'passende' Funktionsgleichung.
- c) Prüfen Sie, ob Ihr Ergebnis zu den 4 Punkten passt.
- d) So weit alles klar - oder? Mit dem Ansatz kann man doch endlich frei hin und her inter- und extrapolieren ...
Vor Ihrer endgültigen Stellungnahme berechnen Sie zu allem Überfluss noch $f(15)$ und $f(1)$.
- e) Sagen Sie klipp und klar, was Ihre Ergebnisse von der Sache her bedeuten würden.
- f) So, was halten Sie von Ihren Rechnungen?
– Bitte urteilen Sie genau, in welchen Bereichen Ihre Rechnungen etwas taugen, in welchen nicht.
– Dazu bitte eine grobe Handskizze des Funktionsverlaufs.

Suchen Sie nach

- relevanten Problemen, die Schüler/innen in der 11 ansprechen?
 - Anwendungen aus den Bereichen Energie, Verkehr und Ökologie?
 - Angeboten, in denen es um die Erarbeitung von Handlungsorientierungen geht?
- Sek. I-Stoffwiederholungen auf "gehobenem Niveau" für die 11?
- Materialien, welche die 11.1 auf die Analysis hin orientieren?
- einem Kurskonzept für die 11.1?



- * Material, dessen Bearbeitung die Prüfung und Infragestellung mathematischer Ergebnisse nötig macht?
- * Aufgabenstellungen, an denen exemplarisch Modellbildungsprozesse geübt werden können?
- * guten Anlässen, den Funktionenvorrat zu ergänzen, ihn im Überblick zu kritisieren und nach neuen Funktionstypen Ausschau zu halten?

Dann:

greifen Sie zu!

ISBN 3-930197-21-7



€ 12,50