Sammlung IV zur Wahl der Baumdiagramm-Stufen

1. Qualitätskontrolle

Bei der Produktion von Porzellangefäßen sind erfahrungsgemäß 15 % der Gefäße wegen schlechter Form, 20 % wegen unsauberer Farbe und 25 % wegen ungleichmäßiger Oberfläche nicht I. Wahl. Ein Porzellangefäß ist II. Wahl, wenn es genau eine der drei Kontrollen nicht besteht. Der Rest ist Ausschuss.

a) Fertige ein vollständiges Baumdiagramm für den Prüfungsablauf an.

b) Wie groß ist der Anteil an Gefäßen I. Wahl?

c) Wie häufig gibt es II. Wahl?

d) Wie viel Ausschuss gibt es?

2. Tennisspiel

In einer Familie spielen Vater, Mutter und der Sohn begeistert Tennis. Der Vater verspricht dem Sohn einen neuen Tennisschläger, wenn er von drei Spielen, die er abwechselnd gegen ihn und die Mutter bestreiten soll, zwei in Folge gewinnt. Der Sohn macht gerne Mathematik und führt seit Jahren eine Statistik darüber, wie er gegen die Eltern abgeschnitten hat; daher weiß er, dass er gegen den Vater in der Regel 2 von 3 Spielen verliert, gegen die Mutter jedoch 2 von 3 Spielen gewinnt.

|  |  |
| --- | --- |
| Antwort 1: | Spiele in der Reihenfolge Mutter – Vater – Mutter, denn dann kommt die leichter zu schlagende Mutter 2-mal vor. |
| Antwort 2: | Spiele in der Reihenfolge Vater – Mutter – Vater, denn darin gibt es 2-mal die Möglichkeit, dem "wahrscheinlichen" Sieg über die Mutter einen Sieg über den Vater anzufügen. |

3. Die rote Kugel gewinnt

a) In einer Urne liegen 4 Kugeln: 3 weiße und eine rote. Zwei Spieler ziehen abwechselnd je eine Kugel und legen sie nicht zurück. Wer die rote Kugel zieht, hat gewonnen.

Ist es günstiger als erster zu ziehen oder nicht?

|  |  |
| --- | --- |
| Antwort 1: | Ja. Dann hat man schließlich als erster die Chance, die rote Kugel zu erwischen! |
| Antwort 2: | Nein. Denn dann sind im zweiten Versuch die eigenen Chancen höher, wenn der andere nicht zufällig sofort die Rote zieht. |

b) Wie ist die Frage zu beantworten, wenn 50 Kugeln in der Urne liegen, davon eine rote?

c) Verallgemeinere die Antwort auf die Frage für eine gerade Anzahl Kugeln in der Urne und eine ungerade Anzahl (und davon jeweils eine rote).

**Wahl der Baumdiagrammstufen**

In den bisherigen Beispielen sind die Stufen des Baumdiagramms intuitiv zu erkennen und durch eine Überschrift auch leicht kenntlich zu machen. Aber vielen Schüler-innen fällt es schwer, bei komplexeren Fragestellungen die Stufen des Baumdiagramms geeignet festzulegen – siehe die "Sammlung IV zur Wahl der Baumdiagrammstufen". Anhand der drei Beispiele trainiere ich mit ihnen die Regel zur Wahl der Überschriften und der Knotenfüllungen. Da diese drei Aufgaben auch für Lehrer/innen ungewohnt sind, führe ich ihre Bearbeitung hier kurz aus.

**Qualitätskontrolle:** Für die Aufgabe haben viele meiner Schüler-innen als Stufen die I., II. Wahl und den Ausschuss notiert und konnten kein strukturierendes Baumdia-gramm skizzieren. Die Tätigkeiten und damit die Überschriften sind hier: Prüfung der Form, der Farbe, der Oberfläche – jeweils mit den Ergebnissen "i. O." (in Ordnung) oder "NO" (nicht in Ordnung) in den Knoten. Der Rest ist die Übertragung der angegebenen Wahrscheinlichkeiten. Die Regel "die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von einem Knoten ausgehen, addieren sich zu 100 %" ist hier hilfreich, um die Gegenwahrscheinlichkeiten für den jeweils zweiten Ast zu bestimmen.

Prüfung der

i. O.

51 % I

75 %

**Oberfläche**

**Farbe**

**Form**

NO

17 % II

25 %

i. O.

12,75 % II

75 %

NO

25 %

i. O.

9 % II

75 %

NO

25 %

i. O.

75 %

NO

25 %

i. O.

80 %

NO

20 %

i. O.

80 %

NO

20 %

i. O.

85 %

NO

15 %

Die Summenregel ist hier auch zu gebrauchen, wenn man geprüft hat, welcher Pfad laut Vorgabe zu einer I., II. Wahl oder zu Ausschuss führt. Es genügt nämlich, die vier aufgeführten Pfadwahrscheinlichkeiten zu berechnen. Da die Regel "Summe = 100 %" für alle Pfadwahrscheinlichkeiten zusammen gilt, kann man die Wahrscheinlichkeit für Ausschuss berechnen, indem man sie über die Gegenwahrscheinlichkeit (zu I. und II. Wahl) berechnet.

Ergebnisse: P(I. Wahl) = 51 %; P(II. Wahl) = 38,75 %;

P(Ausschuss) = P(nicht I. oder II. Wahl) = 100 % - P(I. oder II. Wahl) =

100 % - (51 % + 38,75 %) = 10,25 %.

**Tennisspiel:** Hier sind nach Vorgabe zwei Spielabfolgen vorgegeben und dafür sind zwei Baumdiagramme anzufertigen. Mit der Regel zur Wahl der Überschriften und der zugehörigen Knotenbeschriftungen konstruieren die Schüler/innen wieder ein passendes Baumdiagramm. Als Erweiterung zur Berechnung nur der relevanten Pfadwahrscheinlichkeiten in der Qulaitätskontrolle, sind hier sofort nur die für die Entscheidung relevanten Pfade ausgeführt.

Hier gleich die Ergebnisse:

1. Antwort: Spiel gegen

**Sieg**

**Niederlage**

**S**

**N**











**S**

**N**





**S**

**N**







**S**







Ausgeführt sind nur die für einen Erfolg E relevanten Pfade: 

**Mutter**

**Mutter**

**Vater**

2. Antwort: Spiel gegen

**Sieg**

**Niederlage**

**S**

**N**









**S**

**N**



**S**

**N**





**S**











**Vater**

**Vater**

**Mutter**

Argumentation 2 trifft zu.

**Die rote Kugel gewinnt:** In dem Beispiel kommt es darauf an, das Baumdiagramm zu beenden, wenn der vorgegebene Spielablauf es verlangt. Zudem muss als Überschrift jeweils notiert werden, wer zieht, um den Überblick zu behalten. Entsprechend muss am Ende überlegt werden, welche Pfade zum Gewinn für Spieler 1 führen, welche zum Gewinn für Spieler 2, um die Summenregel richtig nutzen zu können.

a)

Es zieht:

R

W



**Spieler 1**

W

W

W

R

R





1

**Spieler 1**

**gewinnt**

**Spieler 2**

**gewinnt**

**Spieler 1**

**gewinnt**

**Spieler 2**

**gewinnt**

****

****

****

**Spieler 2**

**Spieler 1**

**Spieler 2**

Herauskommt, dass beide Spieler mit der Wahrscheinlichkeit 50 % gewinnen. Beide Argumentationen treffen also nicht zu.

b)

R

W



**Spieler 1**

W

W

W

W

R

R





R

R



1

**Spieler 1**

**gewinnt**

**Spieler 2**

**gewinnt**

**Spieler 1**

**gewinnt**

**Spieler 1**

**gewinnt**

**Spieler 2**

**gewinnt**

****

****

****

**Spieler 2**

**Spieler 1**

**Spieler 2**

**Spieler 1**



**Spieler 2**

◼ P (Gewinn Spieler 1) = 

Jede Pfadwahrscheinlichkeit, die auf R endet, ergibt als gekürztes Produkt . Es gibt 25 Pfade, die zum Gewinn für Spieler 1 führen.

◼ P (Gewinn Spieler 2) analog Spieler 1 bzw. = 1 - P (Gewinn Spieler 1) = 

◼ Antwort 1 und auch Antwort 2 sind falsch.

c) Das Ergebnis in b zeigt, dass Anfänger und zweiter Spieler immer gleiche Chancen auf einen Sieg haben, solange die Anzahl der Kugeln in der Urne gerade ist. Bei ungerader Anzahl hat der erste Spieler größere Chancen, da er den ersten und letzten Zug machen kann. Z.B. hat er bei 51 Kugeln (davon eine rote) eine Gewinnchance von .

*Zum Unterricht: Ich erinnere ausdrücklich an die Regeln zu den Überschriften und die Beschriftung der zugehörigen Knoten (siehe das Merkregelblatt). Jede/r Schüler/in erhält eines der drei Probleme, bearbeitet zunächst nur den Auftrag "skizziere ein Baumdiagramm" (noch ohne Wahrscheinlichkeiten), verständigt sich dann in einer 3er- oder 4er-Gruppe auf eine brauchbare Bearbeitung. Nach dem Zufallsprinzip wird zu jedem Problem zunächst eine Gruppe, dann darin ein-e Schüler-in für die Vorstellung vor der Klasse ausgewählt. Ich korrigiere Fehler und ergänze Erleichterungen nach jeder Präsentation: Ich erläutere bei der Qualitätskontrolle die vier nur auszurechnenden Pfadwahrscheinlichkeiten, wobei das gesamte Baumdiagramme stehen bleibt, damit mit der Gegenwahrscheinlichkeit argumentiert werden kann; beim Tennisspiel die nur darzustellenden Pfade, also ein Teilbaumdiagramm, weil die anderen Pfade für die Beantwortung der Fragestellung nicht gebraucht werden; bei der roten Kugel erkläre ich den Zusammenhang der Über- und Unterschriften. Nach Übernahme der drei Baumdiagramme ins Heft bearbeitet jede/r die Aufgaben zu Ende durch Ergänzung der Astwahrscheinlichkeiten, Berechnung der Pfad-Wahrscheinlichkeiten, Zusammenfassung von Wahrscheinlichkeiten und Beantwortung der Fragestellung. Für die Vorstellung (wieder nach Zufallsauswahl) werfe ich die ausgefüllten Baumdiagramme (aus den Lösungen) an die Wand.*