## **Übung zur Sicherung und Festigung**

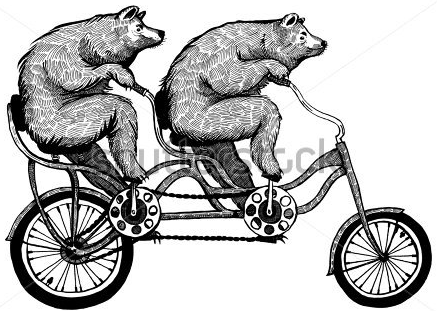
**B**

Klasse : 12

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Arbeitsform | Zeitrahmen | Arbeitsmaterial |
| ☺☺ | 80 min | PC/Geogebra und WORD |

**Ziel ist die Festigung der Methoden zur Untersuchung von Funktionen mit Hilfe eines CAS-Systems bezogen auf Grenzwerte, Symmetrie, Nullstellen, besondere Punkt u. Ortskurven**

# **Wie arbeiten Sie an dieser Station?**

Sie arbeiten in dieser Station in einem sogenannten **Lerntandem**. Lernen geht häufig zusammen einfacher und effektiver als allein und es hilft, wenn man sich gegenseitig unterstützen und austauschen kann. Bei dieser Methode trainiert ihr euch gegenseitig.

Nach jedem Aufgabenteil wechseln Beide die Rollen. A beginnt in der Rolle des „Lernenden“ und B in der Rolle des „Trainierenden“. B hat als Hilfestellung die Lösungen von A zu den Aufgabeteilen a, c, e und A die Lösungen zu den Aufgabenteilen b, d, und f von B.

Jedes Tandem arbeitet mit einem (!) PC. Auf dem PC finden Sie die Aufgabenstellungen, in die sie ihre Lösungen jeweils ergänzen können. Auf ihrer Moodle-Plattform finden Sie noch Tipps zum schreiben von Mathe-Formeln mit Word. Bildschirmausschnitte können Sie mit dem Snipping-Tool aus Windows-> Zubehör erstellen (ab Windows 2007).

A bearbeitet den Aufgabenteil laut denkend während B gut zuhört und mit Fragen und kleinen Hinweisen weiterhilft, falls A nicht von alleine weiterkommt. Hat A den Aufgabenteil fertig, beginnt B mit dem nächsten Aufgabenteil in der Rolle des Lernenden und A hört gut zu und unterstützt so wenig wie nötig.  
**Appell an die Lernenden:** Setzen Sie sich intensiv mit Ihren Aufgabenteilen auseinander und geben Sie nicht auf, eine gute Trainerin bzw. ein guter Trainer stehen Ihnen zur Seite!

**Appell an die Trainierenden**: Bleiben Sie geduldig und sagen Sie nichts vor. Denn ohne Verstehen nützt ein Ergebnis dem Lernenden gar nichts.

**Arbeitsauftrag**

Es ist folgende Funktionenschar gegeben:

1. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich

**A**

**Lösung** (Bitte dokumentieren Sie ihre Lösungen in mathematischer Fachsprache, falls Sie einen CAS-Befehl genutzt haben geben Sie diesen in Klammern hinter der Umformung an.):

Da in ganzrationale Funktionen und Exponentialfunktion beliebige Werte für eingesetzt werden dürfen, gilt dies auch für das obenstehende Produkt (unabhängig vom Parameter).

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
| Ganzrationale Fkt, Exponentialfkt. =>  => D=IR ohne die Nullstellen v. n(x)  =>  => | Beispiel 1 (gebrochen rat. Funktion)    Beispiel 2: (Logarithmusfunktion |

1. Grenzwertbetrachtungen:   
   Bestimmen Sie die Grenzwerte an allen Grenzen des Definitionsbereichs

**B**

Hint

Untersuchen Sie, inwieweit der Parameter das Ergebnis beeinflusst.

**Lösung:**

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
|  |  |

1. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen.

**A**

Lösung:

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
| Schnittpunkt mit der y-Achse: 0 für x einsetzen so erhält man y-Wert.  Schnittpunkt mit der x-Achse Nullstellen bestimmen.  Achtung: Exponentialfunktionen haben keine Nullstellen.  Falls sich algebraisch keine NST bestimmen lassen numerisch Lösungen bestimmen (z. B. Newton)  Wichtigster Satz bei Nullstellensuche: Ein Produkt wird 0 genau dann wenn einer der Faktoren 0 wird! | **Tipp**: bei komplexeren Funktionen Faktoren einzeln lösen, bei gebrochen-rationalen nur Zählerfunktion 0 setzen. |

Hint Was wissen Sie in diesem Zusammenhang über Exponentialfunktionen ()?

1. Geben Sie an, was für eine Funktion jeweils gelten muss, damit sie die Eigenschaft „Punktsymmetrie zum Ursprung“ bzw. Achsensymmetrie hat. Prüfen Sie die gegebene Funktionenschar auf Symmetrieverhalten.

**B**

Definitionen:

Der Graph einer Funktion heißt achsensymmetrisch, falls:

Der Graph einer Funktion heißt punktsymmetrisch zum Ursprung, falls:

**Lösung**:

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
|  |  |

1. Bestimmen Sie die Extrempunkte sowie die Ortskurve der Extrempunkte.

**A**

**Lösung Extremwerte**:

Für Extremwerte überprüfe ich zu erst die notwendige Bedingung:

(löse-Befehl in Geogebra

Einsetzen der Werte in die zweite Ableitung sowie Vorzeichenüberprüfung liefert:

Also gilt zusammen:  
Die Funktionenschar besitzt für alle den und den Hochpunkt .

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
| Notwendige Bedingung:  Nullstellen in die zweite Ableitung einsetzen oder **Vorzeichenwechsel** der ersten Ableitung an diesen Stellen prüfen.   * HOP * TIP   Falls Nullstellen nicht algebraisch zu bestimmen, an Newton-Verfahren denken. | Einsetzen in die Ausgangsfunktion:    Durch den Trick mit dem elementweisen Zugriff auf die Nullstellenliste bleibt die Lösung dynamisch, d. h. ändert man den Funktionsterm ab, ändern sich die Werte mit. |

**Lösung Ortskurve:**

Die Funktionenschar besitzt für alle den und den Hochpunkt .

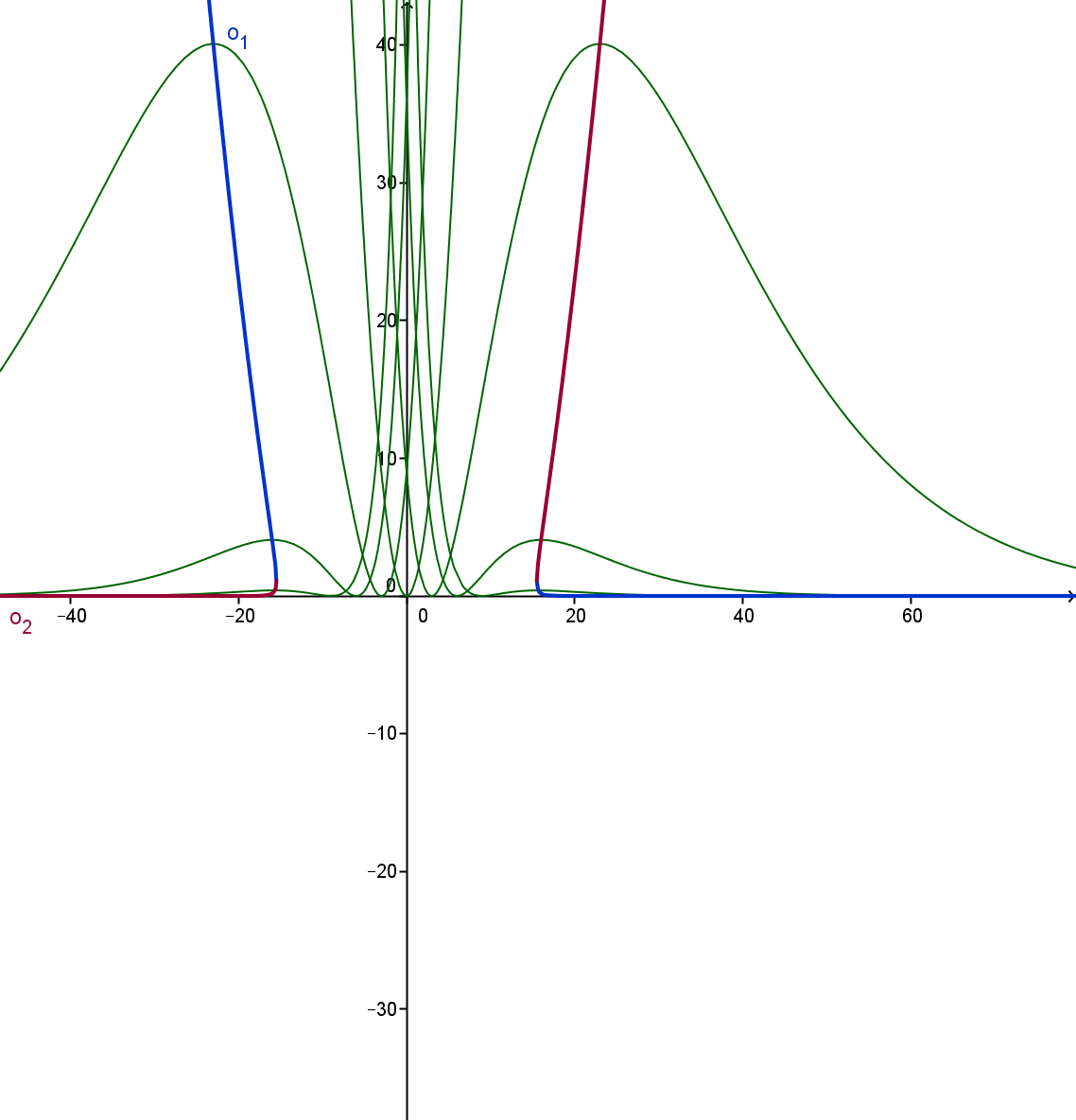
Aus den Extrempunkten lässt sich die Ortskurve herleiten.

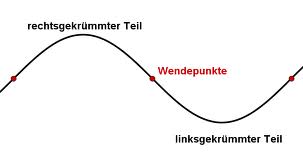
Für die Tiefpunkte ist dies die Ortskurve . Da alle Tiefpunkte den y-Wert 0 haben.

Für die x-Koordinate der Hochpunkte umgestellt nach k ergibt sich (mit CAS):

Setzt man den rechtsstehenden Ausdruck für k in die y-Koordinate der HOP ein (einmal mit + und einmal mit -), ergeben sich zwei abschnittsweise definierte Funktionen, die zusammen die Ortskurve bilden (vgl. und in der untenstehenden Abbildung.

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
| Strategie: Wie in der Lösung beschrieben.  Skizzieren einiger Terme der Funktion oder die Arbeit mit einem Schieberegler helfen das Ergebnis zu überprüfen.  (**Achtung! Will ich Schiebereglern arbeiten, muss ich meine Funktionenschar mit einem anderen Parameternamen und unter anderen Funktionsbezeichnern speichern. Denn durch den Schieberegler lässt sich nicht mehr allgemein rechnen**). | Mit dem Befehl Folge lässt sich eine Liste von Funktionen mit z.B. k=-3, -2, -1, 0, 1,2, 3 erzeugen, die dann auch gezeichnet werden kann. |



1. [](http://www.google.de/imgres?biw=1366&bih=559&tbm=isch&tbnid=gcfJk74kOJvP6M:&imgrefurl=http://www.serlo.org/math/wiki/article/view/krummung-eines-funktionsgraphen&docid=sZyJwE5CDF57QM&imgurl=http://www.serlo.org/uploads/1129.png&w=810&h=446&ei=D8beUvbyG8bEtAba7YHQAQ&zoom=1&iact=rc&dur=3048&page=2&start=22&ndsp=29&ved=0CNgBEK0DMCk)Bestimmen Sie die Wendepunkte sowie das Krümmungsverhalten der Funktionenschar.

**B**

Hint

Überlegen Sie zunächst: Woran erkenne ich die Krümmungsrichtung?

**Lösung:**

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
|  |  |

1. Zeichnen Sie in das gegebene Koordinatensystem die Graphen der Funktion für und ermitteln Sie die Tangentengleichungen jeweils an der Stelle .

**+B**

**A**

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
|  |  |