## **Übung zur Sicherung und Festigung**

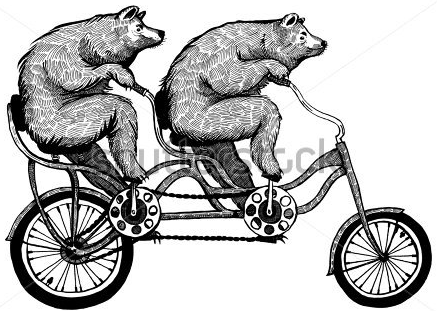
**A**

Klasse : 12

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Arbeitsform | Zeitrahmen | Arbeitsmaterial |
| ☺☺ | 80 min | PC/Geogebra und WORD |

**Ziel ist die Festigung der Methoden zur Untersuchung von Funktionen mit Hilfe eines CAS-Systems bezogen auf Grenzwerte, Symmetrie, Nullstellen, besondere Punkt u. Ortskurven**

# **Wie arbeiten Sie an dieser Station?**

Sie arbeiten in dieser Station in einem sogenannten **Lerntandem**. Lernen geht häufig zusammen einfacher und effektiver als allein und es hilft, wenn man sich gegenseitig unterstützen und austauschen kann. Bei dieser Methode trainiert ihr euch gegenseitig.

Nach jedem Aufgabenteil wechseln Beide die Rollen. A beginnt in der Rolle des „Lernenden“ und B in der Rolle des „Trainierenden“. B hat als Hilfestellung die Lösungen von A zu den Aufgabeteilen a, c, e und A die Lösungen zu den Aufgabenteilen b, d, und f von B.

Jedes Tandem arbeitet mit einem (!) PC. Auf dem PC finden Sie die Aufgabenstellungen, in die sie ihre Lösungen jeweils ergänzen können. Auf ihrer Moodle-Plattform finden Sie noch Tipps zum schreiben von Mathe-Formeln mit Word. Bildschirmausschnitte können Sie mit dem Snipping-Tool aus Windows-> Zubehör erstellen (ab Windows 2007).

A bearbeitet den Aufgabenteil laut denkend während B gut zuhört und mit Fragen und kleinen Hinweisen weiterhilft, falls A nicht von alleine weiterkommt. Hat A den Aufgabenteil fertig, beginnt B mit dem nächsten Aufgabenteil in der Rolle des Lernenden und A hört gut zu und unterstützt so wenig wie nötig.  
**Appell an die Lernenden:** Setzen Sie sich intensiv mit Ihren Aufgabenteilen auseinander und geben Sie nicht auf, eine gute Trainerin bzw. ein guter Trainer stehen Ihnen zur Seite!

**Appell an die Trainierenden**: Bleiben Sie geduldig und sagen Sie nichts vor. Denn ohne Verstehen nützt ein Ergebnis dem Lernenden gar nichts.

**Arbeitsauftrag**

Es ist folgende Funktionenschar gegeben:

1. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich

**A**

Lösung (Bitte dokumentieren Sie ihre Lösungen in mathematischer Fachsprache, falls Sie einen CAS-Befehl genutzt haben geben Sie diesen in Klammern hinter der Umformung an.):

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
|  |  |

1. Grenzwertbetrachtungen:   
   Bestimmen Sie die Grenzwerte an allen Grenzen des Definitionsbereichs

**B**

Hint

Untersuchen Sie, inwieweit der Parameter das Ergebnis beeinflusst.

Lösung:

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
| Bei ganzrationalen Funktionen entscheidet der Exponent und der Vorfaktor der höchsten Potenz über das Grenzwertverhalten.  Bei Exponentialfunktionen mit positiven Exponenten wachsen ins Unendliche, mit negativen hohen Exponenten laufen gegen Null.  Einsetzen großer Zahlen hilft Hypothesen zu bilden.  Bei vorhandenen Parametern ist zu prüfen, ob er Einfluss auf die höchste Potenz bei ganzrationalen Funktionen oder auf das Vorzeichen der Exponenten von Exponentialfunktionen nimmt.  Zeichnen mit Schieberegler hilft den Einfluss des Parameters zu untersuchen. | Grundsätzlich:  Befehl: Grenzwert[]  Im Beispiel lässt sich die Fallunterscheidung mithilfe der Betragsfunktion abs() nachbilden:    Anmerkung:  Unendlich-Zeichen aus Alpha-Box. |

1. Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen.

**A**

**Lösung**:

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
|  |  |

Hint Was wissen Sie in diesem Zusammenhang über Exponentialfunktionen ()?

1. Geben Sie an, was für eine Funktion jeweils gelten muss, damit sie die Eigenschaft „Punktsymmetrie zum Ursprung“ bzw. Achsensymmetrie hat. Prüfen Sie die gegebene Funktionenschar auf Symmetrieverhalten.

**B**

Definitionen:

Der Graph einer Funktion heißt achsensymmetrisch, falls:

D.h. In gleicher Entfernung von der y-Achse befinden sich die Funktionswerte links und rechts immer auf gleicher Höhe (spiegelsymmetrisch zur y-Achse).

Der Graph einer Funktion heißt punktsymmetrisch zum Ursprung, falls:

D.h. In gleicher Entfernung von der y-Achse haben die Funktionswerte links und rechts immer gegensinnige Vorzeichen, sind aber immer gleich weit entfernt vom Ursprung. (Punktspiegelung an x- und an y-Achse, bzw. Drehung um 180°).

Lösung:

Falls gilt: , da einzige Nullstelle.

Funktionen mit einer „einseitigen“ Nullstelle sind weder punkt- noch achsensymmetrisch (s. Definitionen).

Falls gilt: . Diese Funktion ist achsensymmetrisch.

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
| Erfahrungsgemäß weiß man schon, dass wenn ein Faktor eine Exponentialfunktion ist, dies zu einem nicht symmetrischen Verlauf führt. Daher ist es hier oft möglich schnell ein Gegenbeispiel zu finden, oder festzustellen, dass die Nullstellen nicht symmetrisch liegen (Ausnahme hier: k=0).  Bei ganzrationalen Funktionen genügt es auf die Exponenten zu schauen: Alle gerade => achsensymmetrisch, alle ungerade => punktsymmetrisch. | Suche eines Gegenbeispiels:    Durch den Faktorisiere-Befehl werden die Eergebnisterme oft übersichtlicher!  Oder bei Funktionen ohne Parameter durch Gleichsetzen: |

1. Bestimmen Sie die Extrempunkte sowie die Ortskurve der Extrempunkte.

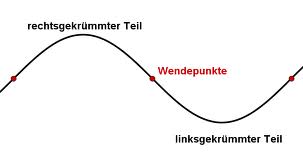
**A**

**Lösung Extremwerte**:

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
|  |  |

**Lösung Ortskurve:**

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
|  |  |

1. [](http://www.google.de/imgres?biw=1366&bih=559&tbm=isch&tbnid=gcfJk74kOJvP6M:&imgrefurl=http://www.serlo.org/math/wiki/article/view/krummung-eines-funktionsgraphen&docid=sZyJwE5CDF57QM&imgurl=http://www.serlo.org/uploads/1129.png&w=810&h=446&ei=D8beUvbyG8bEtAba7YHQAQ&zoom=1&iact=rc&dur=3048&page=2&start=22&ndsp=29&ved=0CNgBEK0DMCk)Bestimmen Sie die Wendepunkte sowie das Krümmungsverhalten der Funktionenschar.

**B**

Hint

Überlegen Sie zunächst: Woran erkenne ich die Krümmungsrichtung?

**Lösung:**

1. Fall:   
   Keine Wendepunkte, die Kurve ist überall linksgekrümmt.
2. Fall:

Im ersten Fall ist die dritte Ableitung negativ im zweiten Fall positiv, d. h. in diesem Fall ist der Graph bis zur ersten Wendestelle linksgekrümmt und zwischen den Wendestellen rechtsgekrümmt und dann wieder linksgekrümmt. Die y-Werte der Ausgangsfunktion können der untenstehenden Geogebra-Abbildung entnommen werden.

1. Fall:

Im ersten Fall ist die dritte Ableitung negativ im zweiten Fall positiv, d. h. in diesem Fall ist der Graph bis zur ersten Wendestelle linksgekrümmt und zwischen den Wendestellen rechtsgekrümmt und dann wieder linksgekrümmt. Die y-Werte der Ausgangsfunktion können der untenstehenden Geogebra-Abbildung entnommen werden.

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
| Notwendige Bedingung:  Nullstellen in die dritte Ableitung einsetzen oder **Vorzeichenwechsel** der zweiten Ableitung an diesen Stellen prüfen.   * WP mit LR-Wechsel * WP mit RL-Wechsel |  |

1. Zeichnen Sie in das gegebene Koordinatensystem die Graphen der Funktion für und ermitteln Sie die Tangentengleichungen jeweils an der Stelle .

**A**

**+B**

|  |  |
| --- | --- |
| Ideen – Verfahren - Strategien | So hilft hier Geogebra |
|  |  |