Modellieren lernen

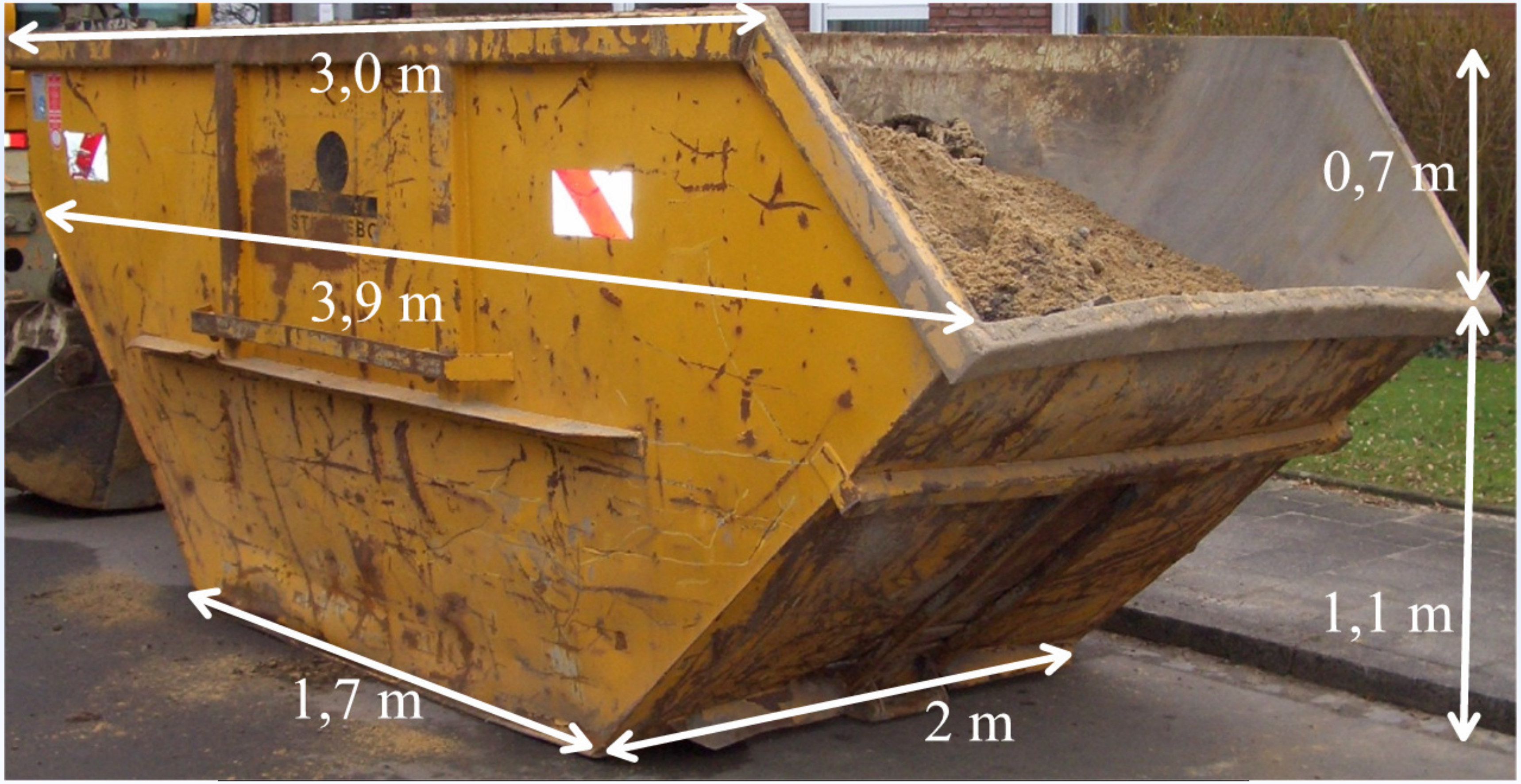
mit offenen Aufgaben

Dr. Gilbert Greefrath

Friedensschule Münster ▪ Pädagogische Hochschule Karlsruhe

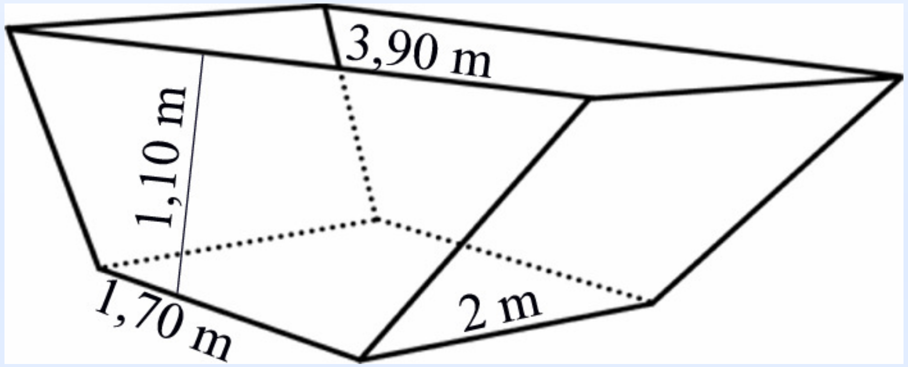
- Was ist eine Modellierungsaufgabe?
- Was ist eine offene Aufgabenstellung?
- Was ist Realitätsbezug?
- Welche Teilprozesse des Modellierens kann man diagnostizieren?

Beispiel Container



- *Wie viel Sand ist in diesem Container?*

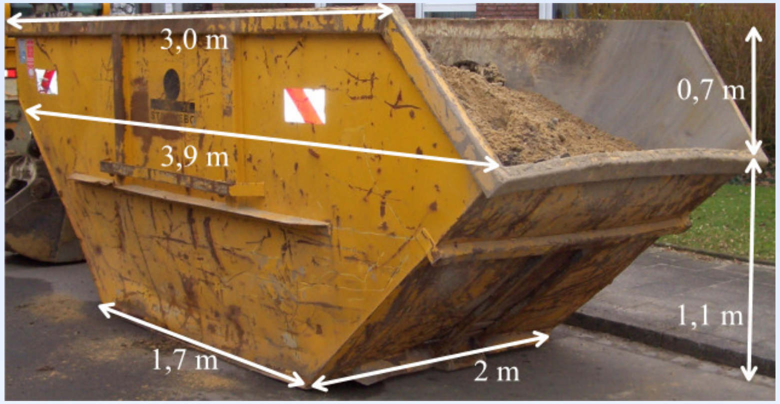
Modell „Container“



$$V = \frac{3,9 + 1,7}{2} \cdot 1,1 \cdot 2\ \mathrm{m}^3 \approx 6,2\ \mathrm{m}^3$$

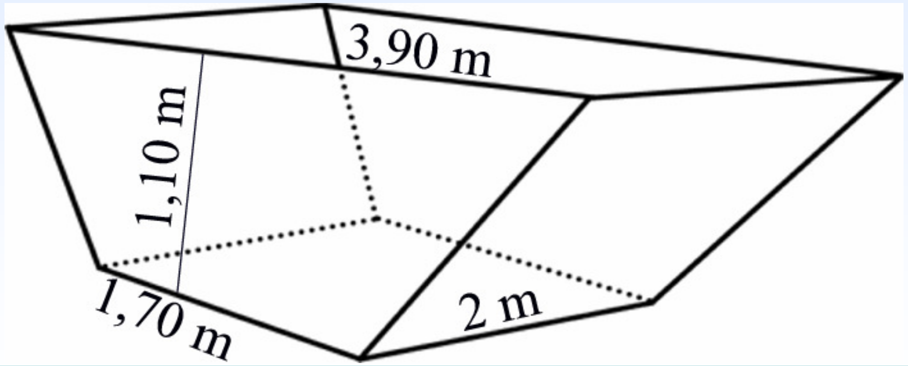
Mögliche Aufgabenstellungen

Modellierungsaufgabe

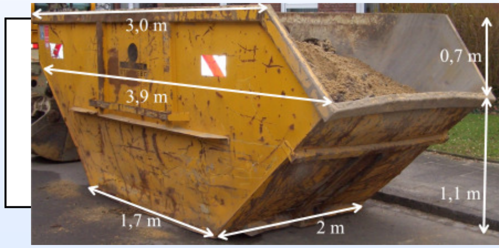


Zwischenform

eingekleidete Aufgabe



Modellierungskreislauf

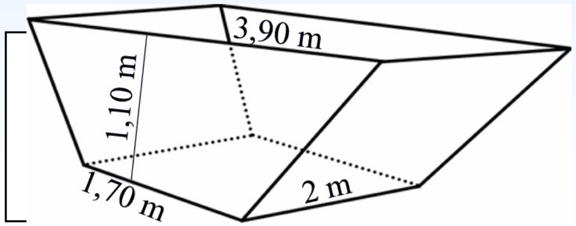


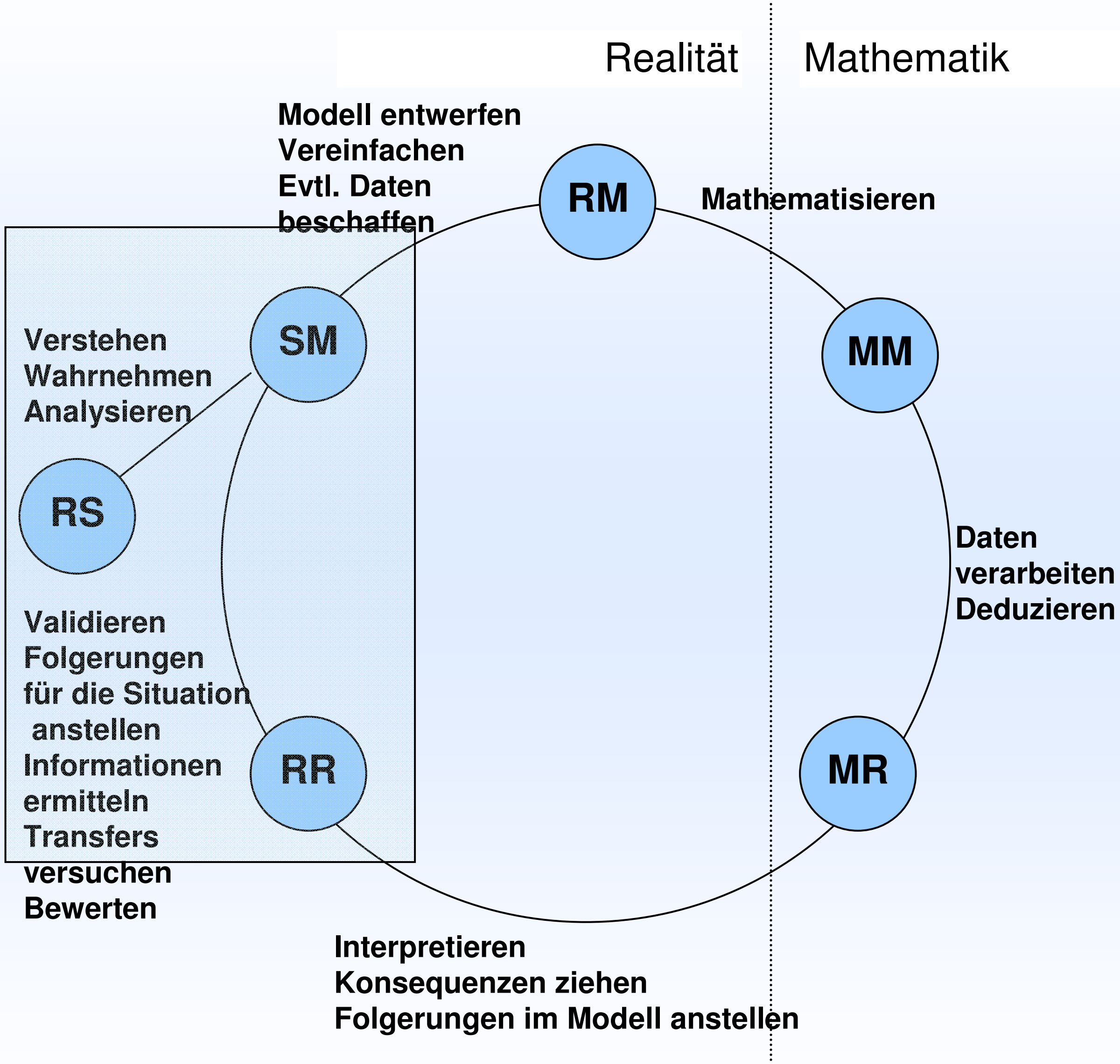
Realität

Mathematik

Mathematisches Resultat

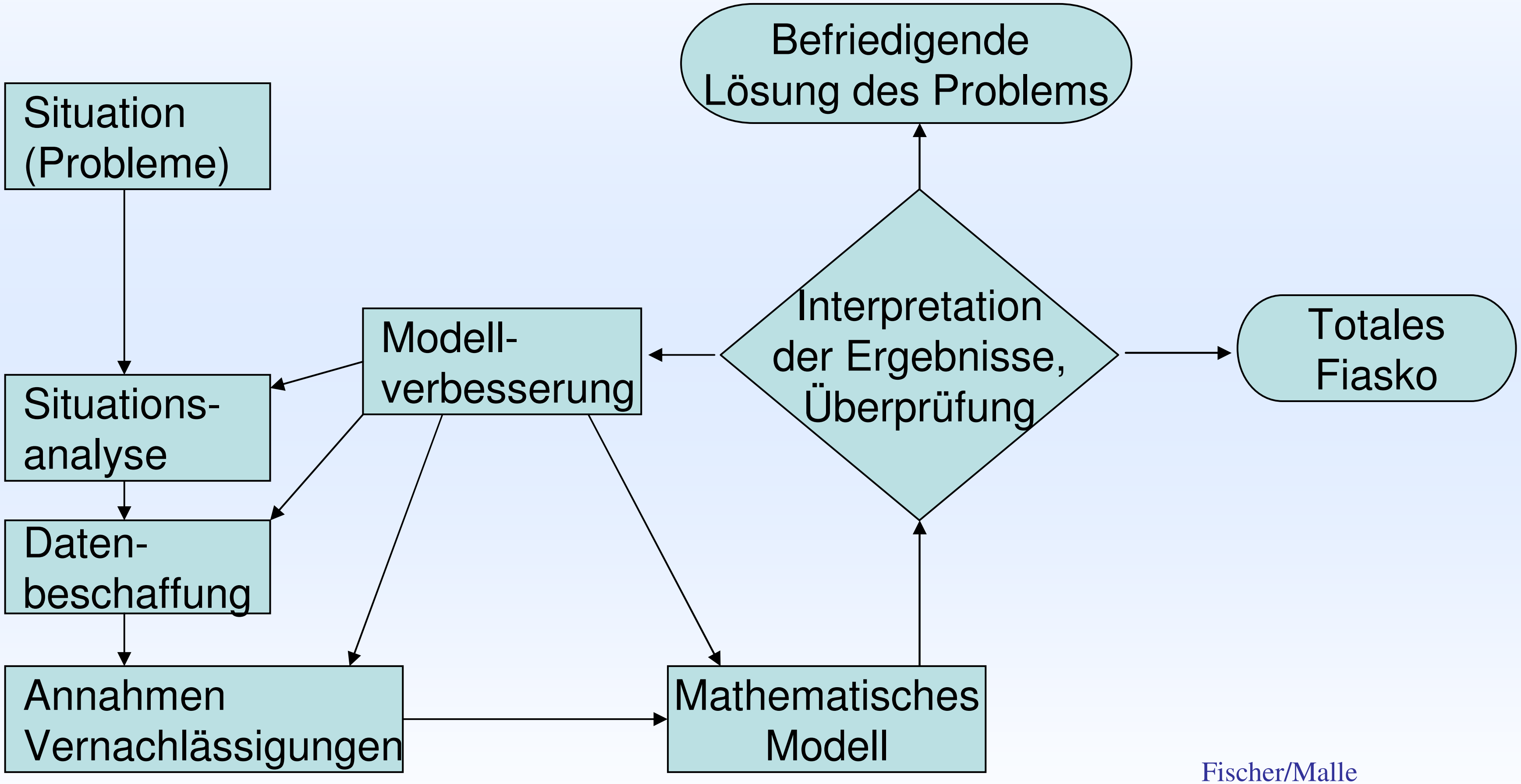
$$V = \frac{3,9 + 1,7}{2} \cdot 1,1 \cdot 2\ \mathrm{m}^3 \approx 6,2\ \mathrm{m}^3$$





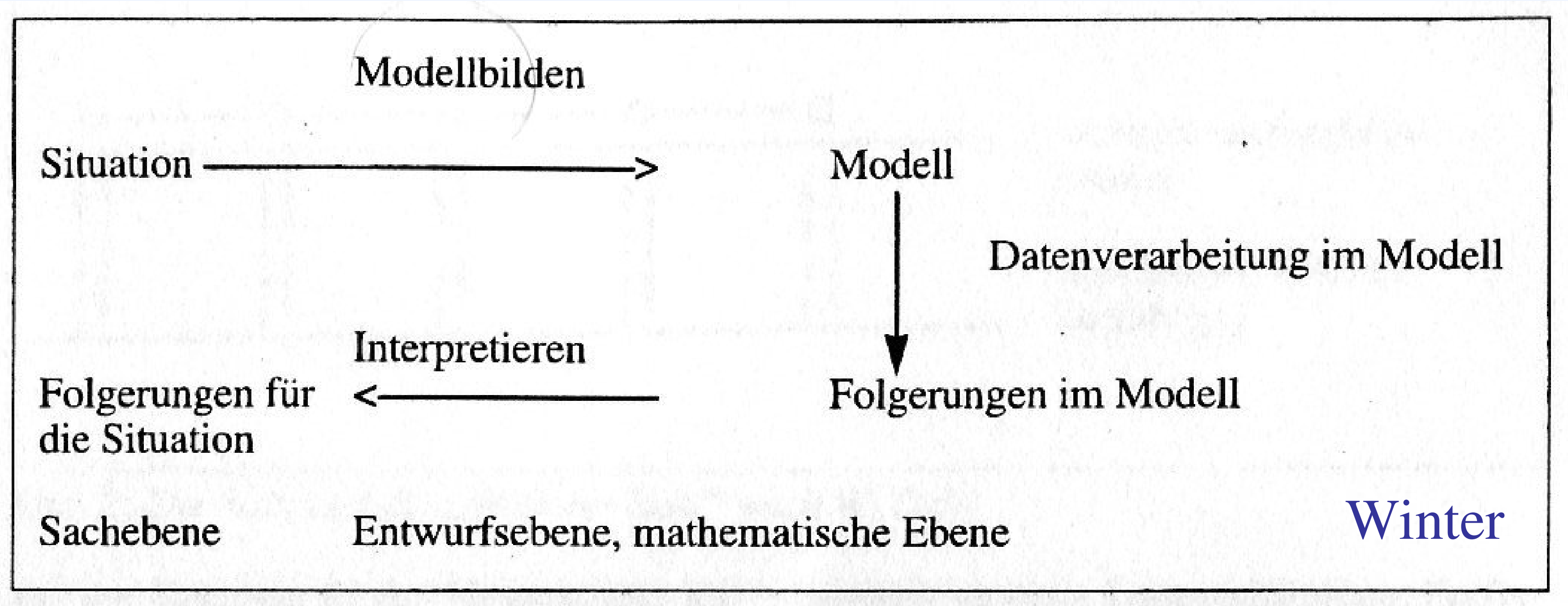
RS	Reale Situation
SM	Situationsmodell / Mentale Repräsentation der Situation
RM	Reales Modell
MM	Mathematisches Modell
MR	Mathematisches Resultat
RR	Reales Resultat

Diskussion des Kreislaufs

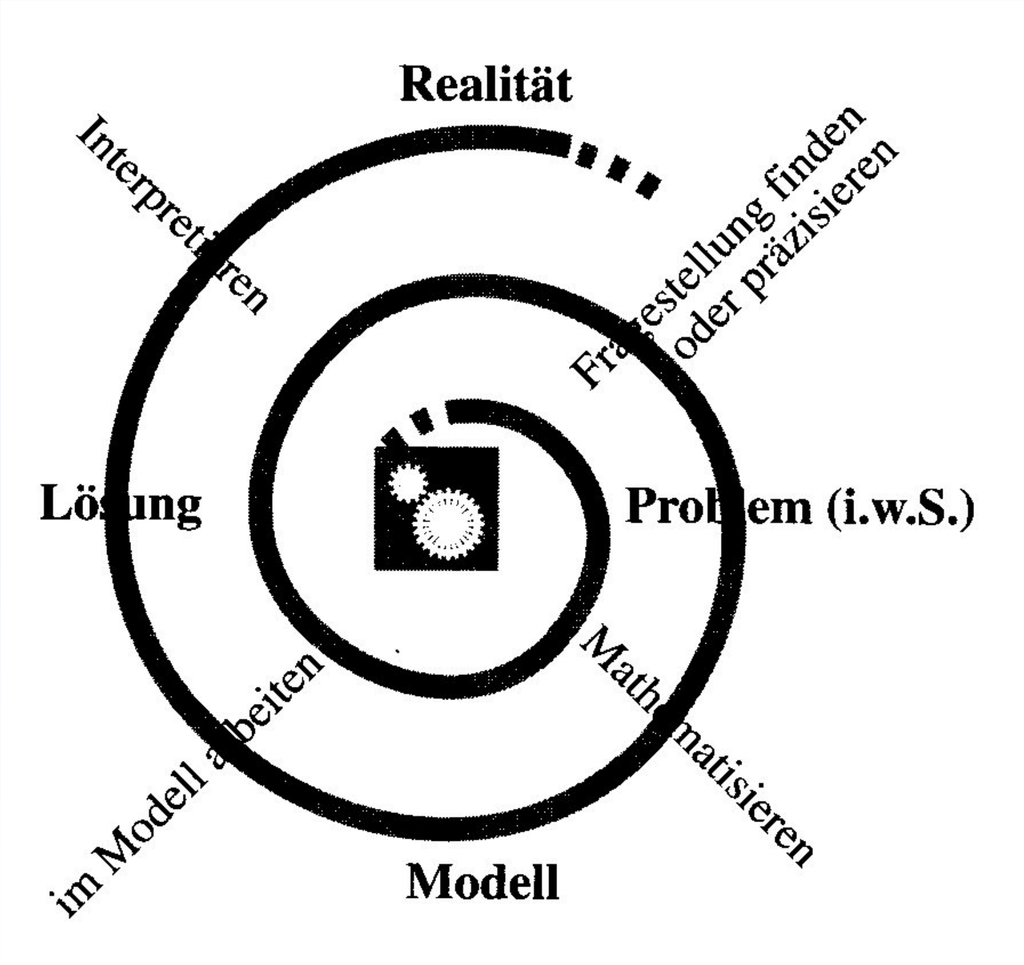


Fischer/Malle

Diskussion des Kreislaufs



Diskussion des Kreislaufs

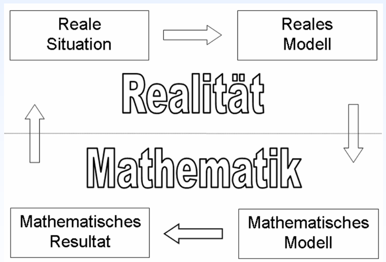


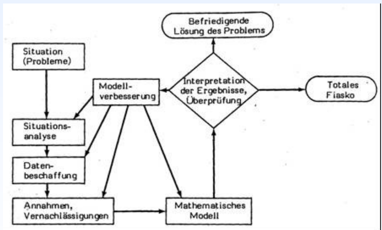
Büchter/
Leuders

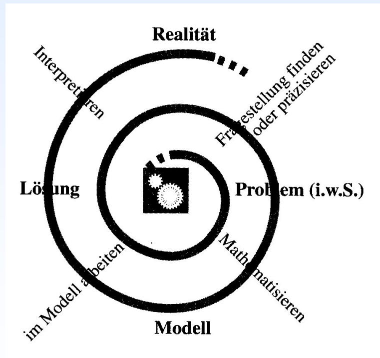
Abstrahieren der Realität

- Reduktion auf wesentliche Merkmale
- Vereinfachung der Arbeit im Modell

- Optimal:
  Konzentration auf genau die Eigenschaften, die zur Lösung des Problems nötig sind.

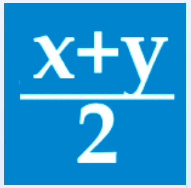






Kompetenzen im Mathematikunterricht

Argumentieren und Kommunizieren



mit Zahlen und Symbolen umgehen

Probleme erfassen, erkunden und lösen

Beziehung und Veränderung beschreiben und erkunden

Modelle erstellen und nutzen

Ebene und räumliche Strukturen nach Maß und Form erfassen

Medien und Werkzeuge verwenden

mit Daten und Zufall arbeiten

Kernlehrplan Sekundarstufe I Nordrhein-Westfalen

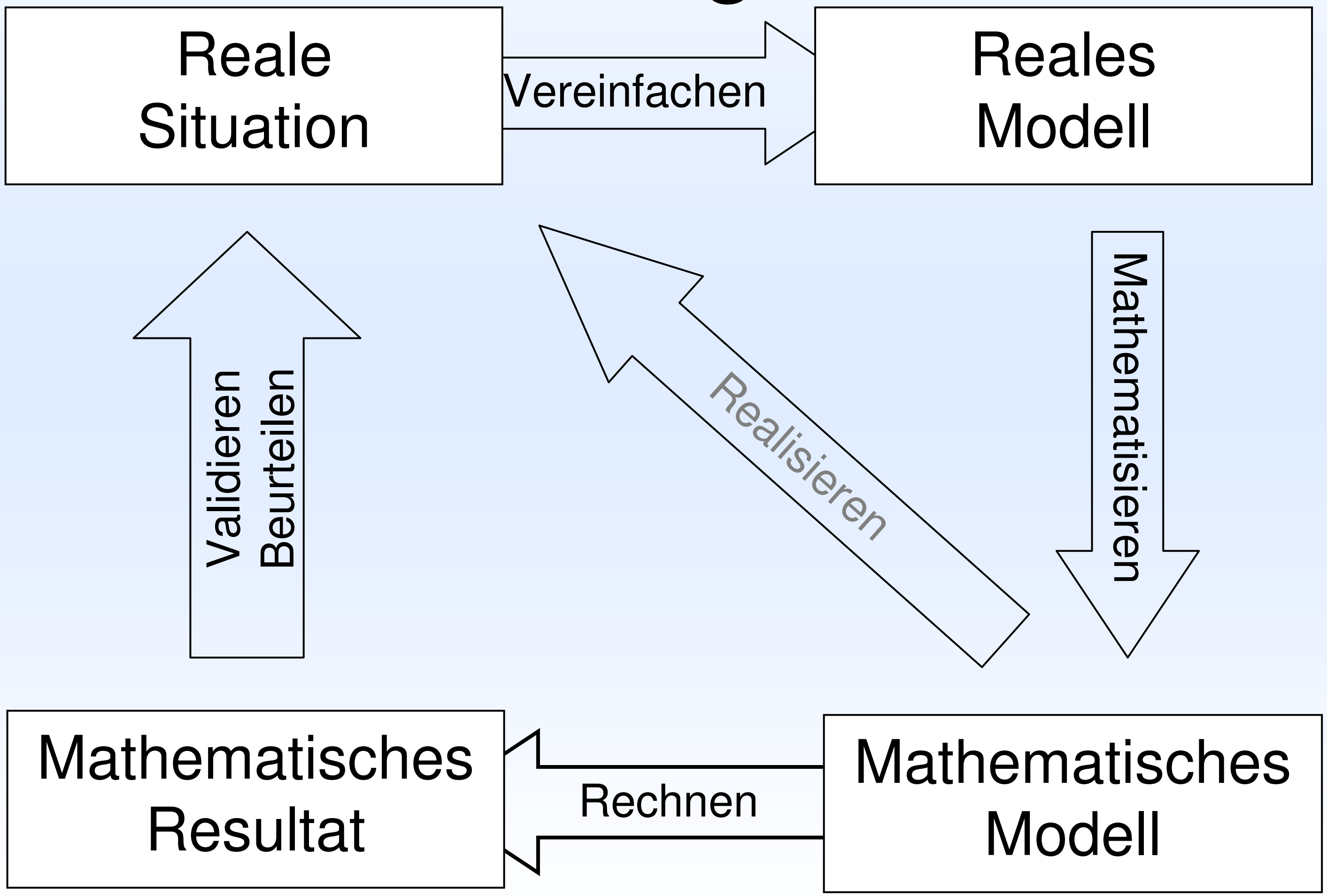
Modellieren – Modelle erstellen und nutzen	
	Schülerinnen und Schüler
Mathematisieren	● übersetzen Situationen aus Sachaufgaben in mathematische Modelle (Terme, Figuren, Diagramme)
Validieren	● überprüfen die im mathematischen Modell gewonnenen Lösungen an der Realsituation
Realisieren	● ordnen einem mathematischen Modell (Term, Figur, Diagramm) eine passende Realsituation zu

Modellieren – Modelle erstellen und nutzen	
	Schülerinnen und Schüler
Mathematisieren	● übersetzen einfache Realsituationen in mathematische Modelle (Zuordnungen, ***lineare Funktionen***, Gleichungen, Zufallsversuche)
Validieren	● überprüfen die im mathematischen Modell gewonnenen Lösungen an der Realsituation und verändern ggf. das Modell
Realisieren	● ordnen einem mathematischen Modell (Tabelle, Graf, Gleichung) eine passende Realsituation zu

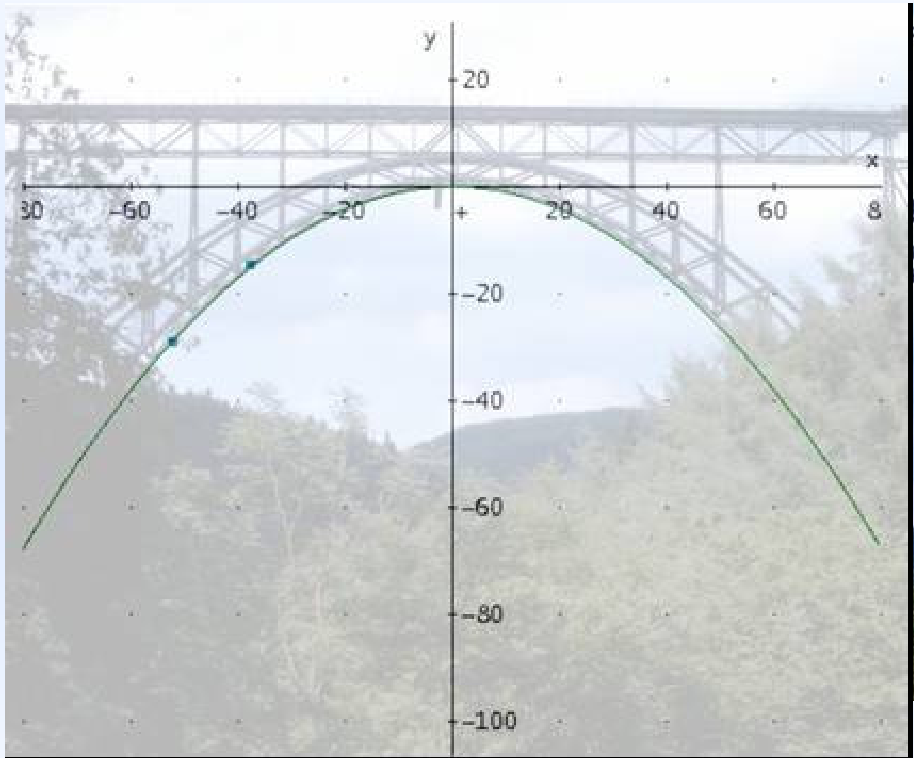
Modellieren – Modelle erstellen und nutzen	
	Schülerinnen und Schüler
Mathematisieren	● übersetzen Realsituationen, ***insbesondere exponentielle Wachstumsprozesse***, in mathematische Modelle (Tabellen, Grafen, Terme)
Validieren	● ***vergleichen und bewerten verschiedene mathematische Modelle für eine Realsituation***
Realisieren	● finden zu einem mathematischen Modell (insbesondere lineare ***und exponentielle*** Funktionen) passende Realsituationen

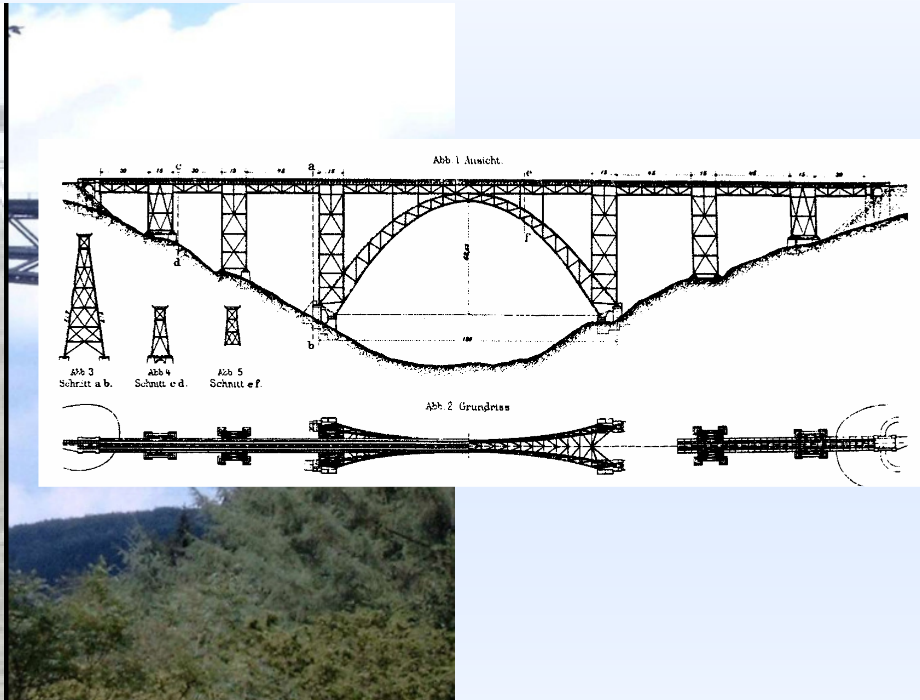
Teilkompetenzen	Indikatoren
Vereinfachen	*Die Schülerinnen und Schüler trennen wichtige und unwichtige Informationen einer Realsituation.*
Mathematisieren	*Die Schülerinnen und Schüler übersetzen Realsituationen in Mathematische Modelle (z. B. Term, Gleichung, Figur, Diagramm, Funktion)*
Rechnen	*Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit dem mathematischen Modell.*
Validieren I	*Die Schülerinnen und Schüler überprüfen die im Modell gewonnenen Informationen an der Realsituation.*
Validieren II	*Sie vergleichen und bewerten verschiedene mathematische Modelle für eine Realsituation.*
Beurteilen	Die Schülerinnen und Schüler beurteilen kritisch das verwendete mathematische Modell.
Realisieren	*Die Schülerinnen und Schüler ordnen einem mathematischen Modell eine passende Realsituation zu bzw. finden zu einem mathematischen Modell eine passende Realsituation.*

Teilkompetenzen im Modellbildungskreislauf



Beispiel Brücke





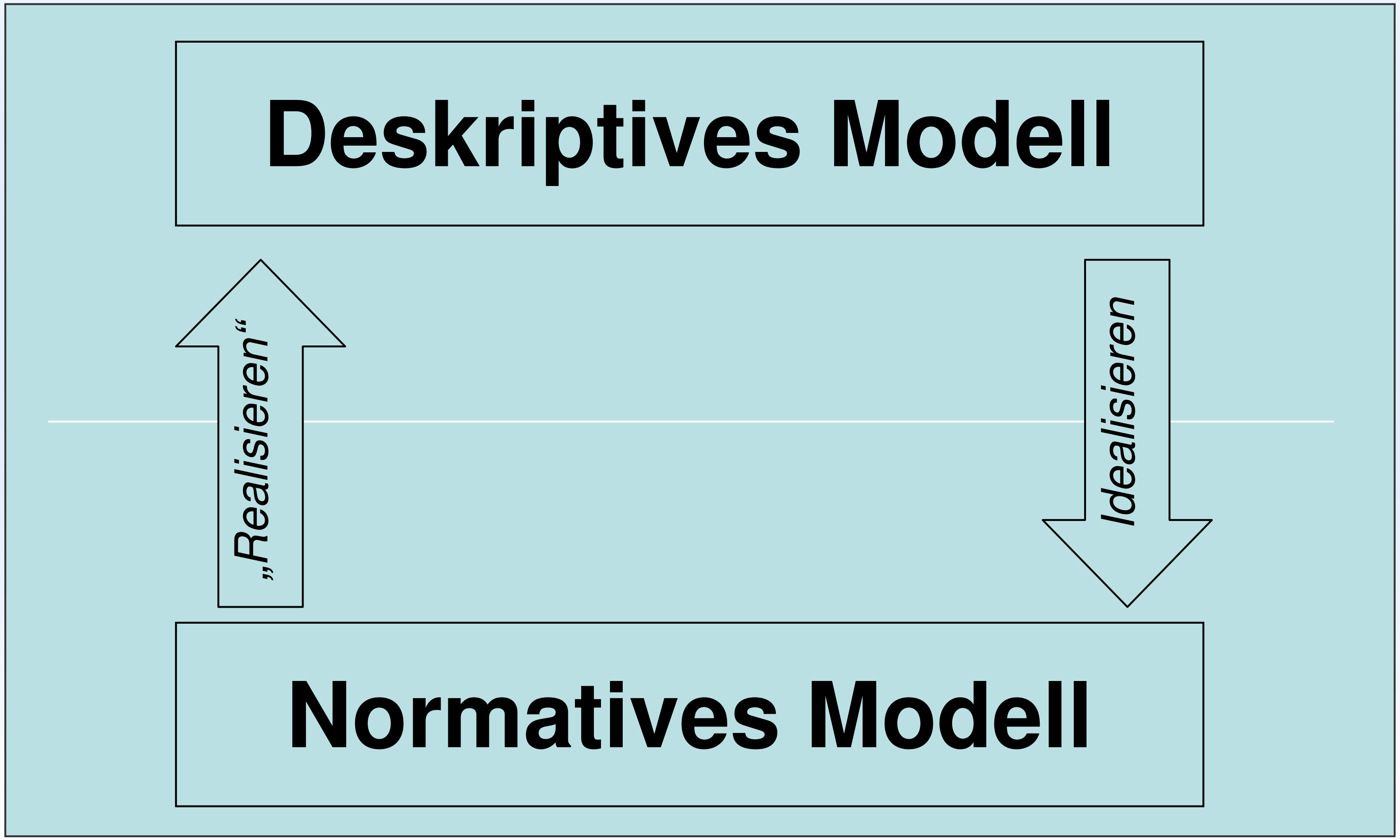
Deskriptives Modell

Normatives Modell

Übersicht verschiedene Modelle

Modell	Funktion	Ziel	Beispiel
Deskriptiv	Beschreiben	Abbildung	Form der Brücke darstellen
Explikativ	Erklären	Verständnis	Form der Brücke erklären
Prognostisch	Vorhersagen	Prognose	Schwachstellen der Brücke aufzeigen
Normativ	Vorschreiben	Realisierung, Simulation	Bauplan der Brücke

Doppelte Modellbildung



Unscharfe offene Aufgaben

Anfangszustand unscharf
Transformation unklar
Endzustand klar beschrieben

- *Was kostet das Verputzen dieses Hauses?*

Maße und Form des Hauses → **Rechteckflächen** → **Fläche und Preis des Putzes**

Offene Aufgaben

Typ der offenen Aufgabe	Anfangszustand	Transformation	Zielzustand
Problemsituation	unklar	unklar	unklar
Unscharfes Problem	unklar	unklar	klar
Interpretationsproblem	klar	unklar	unklar
Strategiefindungsproblem	klar	unklar	klar
Interpretationsaufgabe	klar	klar	unklar
Einfache offene Aufgabe	klar	Klar (mehrdeutig)	klar
Aufgabe erfinden	unklar	klar	unklar
Anfangssituation erfinden	unklar	klar	klar

Problemsituation

unklar → **unklar** → **unklar**

- *Das Haus soll verputzt werden. Finde dazu Fragen, zu deren Beantwortung Mathematik benötigt wird.*

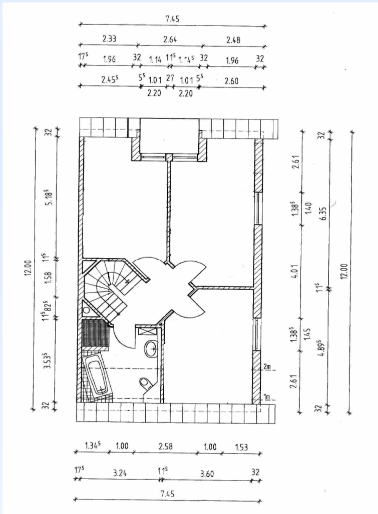
Unscharfes Problem

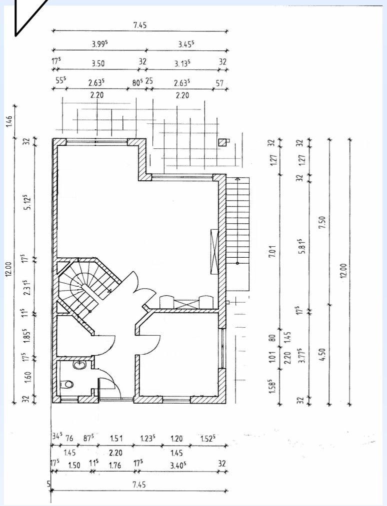
unklar → unklar → klar

- *Was kostet das Verputzen dieses Hauses?*

Interpretationsproblem

klar | **unklar** → **unklar**

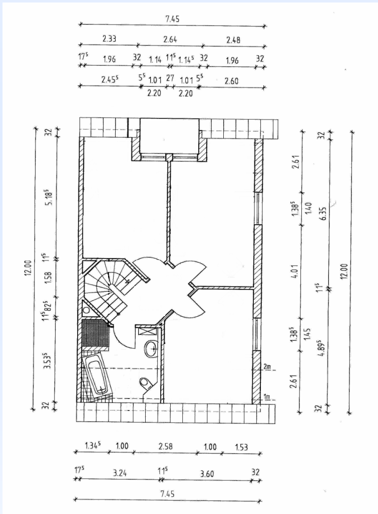


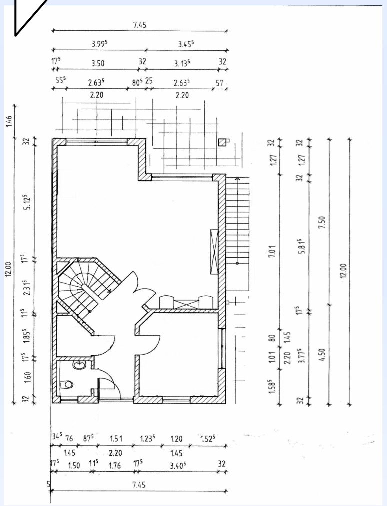


- *Plane den Bodenbelag für dieses Haus.*

Strategiefindungsproblem

klar → **unklar** → **klar**

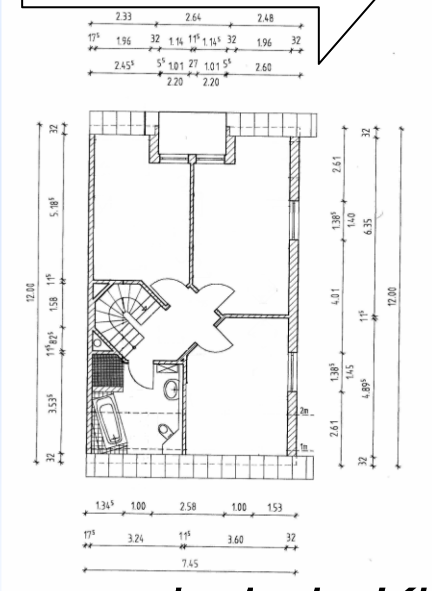




- *Berechne möglichst einfach die Wohnfläche dieses Hauses!*

Interpretationsaufgabe

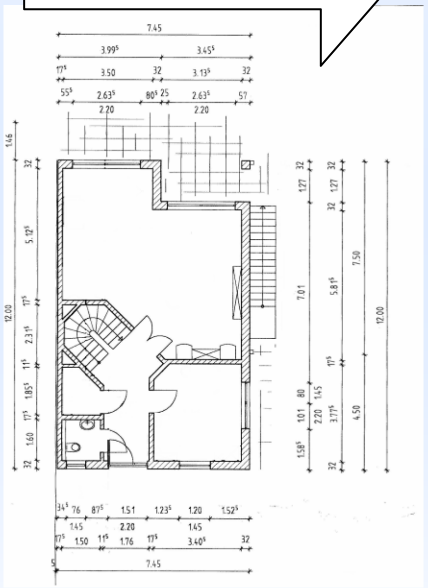
klar → **klar** → **unklar**



- *Welche zwei Zimmer sind als Kinderzimmer am besten geeignet? Betrachte Fläche und Form der Zimmer!*

Einfache offene Aufgabe

klar | **klar** → | **klar**



- *Berechne die Bodenfläche des Hausflurs!*

Aufgabe erfinden

unklar → **klar** → **unklar**

- *Erfinde zu diesem Foto eine Aufgabe, die mit Dreisatz berechnet wird!*

Anfangssituation erfinden

unklar → **klar** → **klar**

■ *Erfinde zu diesem Foto eine Dreisatz-Aufgabe, wobei die Anzahl der Arbeiter sowie deren Arbeits-zeit angegeben werden.*

Merkmale von Aufgaben mit Realitätsbezug

Anregung	Lebensnähe	Authentizität	Lebens-relevanz

Modellierungspotenzial

Eingekleidete Aufgabe	Sachaufgabe	Modellierungs aufgabe	Lernum-gebung

Schulbuchaufgabe (5. Klasse)

Als im Jahre 1969 Neil Armstrong als erster Mensch den 384 400 km von der Erde entfernten Mond betrat, behauptete ein Witzbold:

"Hätten sich die Chinesen alle übereinander gestellt, der zweite auf die Schultern des ersten, der dritte auf die Schultern des zweiten und so weiter, dann hätten sie einen der ihren auch ohne Rakete zum Mond bringen können!"

Was sagst Du dazu? (Es gibt etwa 750 Millionen Chinesen, ihre mittlere Schulterhöhe sei 1,40 m).

Lösungsheft:
Die Chinesen würden einen 1 050 000 km hohen Menschenturm bilden.

348400 km

1 40cm · 75
9800
700
10500.

105 000 000 000,00 km

S. 157
Nr. 27

Die Chinesen haben es villeicht geschafft nur nur:

1. Im Weltraum gibt es keine Luft
2. Die Chinesen würden rumschweben denn dort gibt es keine Schwerkraft
3. Der unterste Chinese würde das Gewicht gar nicht aushalten, er würde zerquetscht werden
4. Und wie sollen die letzten denn auf die Pyramide raufkommen? Villeicht mit einem Hubschrauber oder einer Rakete?

Realitätsbezug

a F: Suche AB

R: Es müssen insgesamt 3 leute
vorhanden und 2 bagger,
(2 baggerfahrer und einer
der beaufsichtigt.)
Dann schaffen Sie auch
den Termin

Was ist Schätzen?

Realität

Raten	Abzählen	Schätzen	Ab-schätzen	Messen

Runden

Mathematik

Über-schlagen

Schätzaufgaben

Anzahl der Schätzgrößen

- Einfache Schätzaufgaben
- Komplexe Schätzaufgaben

Art der Schätzgröße

- Größe (mit Einheit)
- Anzahl (ohne Einheit)
- Reelle Werte
- Ganzzahlige Werte

Darstellung der Schätzgröße

- Gegenstand
- Foto
- Gedanklich

Messen statt schätzen

Beispiel Drink

- *Der Drink im rechten Glas soll 8 € kosten.*
  Was ist ein fairer Preis für das andere Glas?

Kegelmodell

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}3^2 \cdot 2{,}8}{\frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 4} \approx 0{,}59 \qquad P = 0{,}59 \cdot 8\ € \approx 4{,}70\ €$$

Parabelmodell

$$f(x) = 1{,}3\sqrt{x} \qquad \pi\int_0^{2,8} f(x)^2 \mathrm{d}x \approx \int_0^{2,8} 5{,}31x\,\mathrm{d}x \approx \left[2{,}65x^2\right]_0^{2,8} \approx 20{,}8$$

$$\pi\int_0^{4} f(x)^2 \mathrm{d}x \approx 42{,}8 \qquad P = \frac{20{,}8}{42{,}8} \cdot 8\ € \approx 3{,}90\ €$$

Ziel von Diagnoseaufgaben

- Viel über die Gedanken der Schülerinnen und Schüler erfahren

  Eigenproduktionen herausfordernd

- offen
- authentisch
- valide

Unsichtbare Kompetenzen

Sichtbare Indikatoren

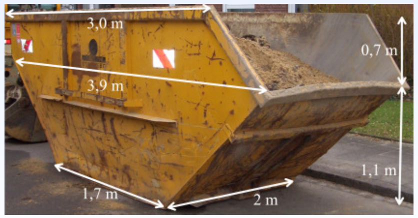
Kompetenz
Modellieren

Teilkompetenz
Validieren

Annahme

Indikator

Die Schülerinnen und Schüler überprüfen die im mathematischen Modell gewonnenen Lösungen an der Realsituation

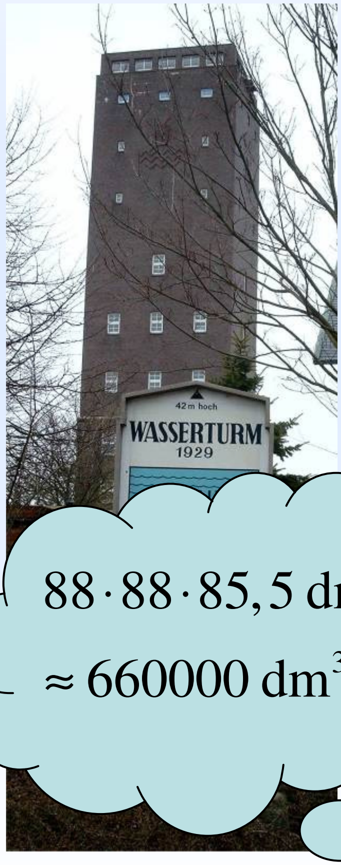


Wie viel sind 6 m^3 Sand? Passen sie in den Container?

Modellierungs-aufgabe Wasserturm

- Diskutiere die Angaben auf der Tafel vor dem Wasserturm auf Norderney!

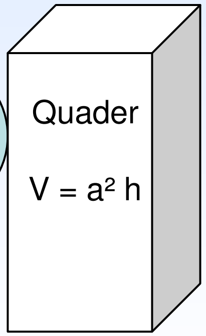
Diagnoseaufgabe zum Validieren

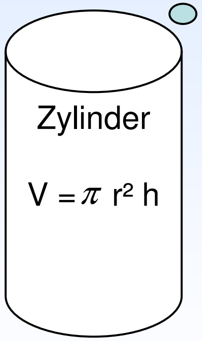


Anna und Paul haben den Wasserbehälter im Wasserturm unterschiedlich modelliert. Anna: „Mein Modell ist besser, denn meine Zahlen passen besser als Pauls!" Überprüfe und nimm Stellung.

$88 \cdot 88 \cdot 85{,}5\ \mathrm{dm}^3$

$\approx 660000\ \mathrm{dm}^3$

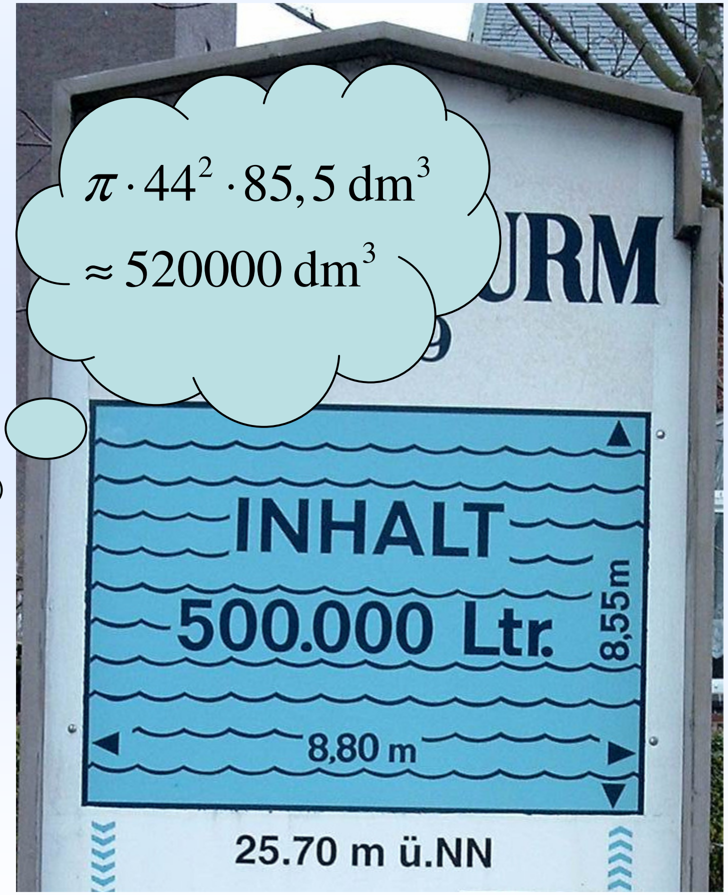




Pauls Modell Annas Modell

$\pi \cdot 44^2 \cdot 85{,}5\ \mathrm{dm}^3$

$\approx 520000\ \mathrm{dm}^3$



Modellierungsaufgabe Löschwasserbehälter

Bestimme geeignete Maße eines Löschwasserbehälters für den Hubschraubertransport.

Diagnoseaufgabe zum Validieren

1. Bestimme die ungefähren Abmessungen dieses Löschwasserbehälters
2. Gib mindestens zwei Wege an, wie du überprüfen kannst, ob dein Ergebnis korrekt ist.

Modellierungsaufgabe Stau

Die Sommerferien beginnen häufig mit vielen Kilometern Stau in Deutschland. Im letzten Jahr waren es an einem Wochenende insgesamt 180 km. Wie viele Menschen befanden sich dann vermutlich im Stau?

Diagnoseaufgabe zum Vereinfachen

Katja und Toni wollen berechnen, wie viele Menschen sich vermutlich in einem Stau der Länge 180 km befinden. Sie haben sich überlegt, welche Informationen wichtig sein könnten. Sie haben eine Liste von benötigten Informationen erstellt. Für welche dieser Informationen würdest du dich entscheiden? Begründe!

- Fahrzeuglänge
- Wetter
- Art des Fahrzeugs
- Benzinverbrauch
- Bundesland
- Abstand zum nächsten Pkw
- Anzahl der Fahrspuren
- Wochentag
- Jahreszeit
- Alter des Fahrers
- Anzahl der Mitfahrer
- Tageszeit
- Baustellen
- Ferienzeit

Diagnoseaufgabe zum Validieren

Katja und Toni wollen berechnen, wie viele Menschen sich vermutlich in einem Stau der Länge 180 km befinden. Sie gehen davon aus, dass ein Fahrzeug 10 m Platz auf der Straße benötigt und haben sich folgende Rechnungen überlegt

$3 \cdot 18000 \cdot 4 =$
$3 \cdot 18000 \cdot 2 =$

Vergleiche die beiden Rechnungen und bewerte sie!

Modellierungsaufgabe Elefant

Der Elefant soll baden. Wie viel Wasser läuft aus einem randvollen Becken über?

Diagnoseaufgabe zum Mathematisieren

Mit welchen der angegebenen geometrischen Körper könnte man am besten einen Elefanten zusammensetzen? Beschreibe genau, wie du es machen würdest!

- Kugel
- Quader
- Zylinder
- Kegel
- Pyramide

Modellierungsaufgabe Brücke

Bestimme die Maße dieser Brücke!

Diagnoseaufgabe zum Validieren

Überprüfe, ob die Müngstener Brücke mit Hilfe der Funktionsgleichung

$$f(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + 107$$

beschrieben werden kann!

Diskussion weiterer Diagnose- und
Modellierungsaufgaben im Workshop.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Informationen im Internet unter: www.greefrath.de

Gilbert Greefrath

Modellieren lernen
mit offenen realitätsnahen Aufgaben

Aulis Verlag Deubner 2006

ISBN 978-3-7614-2666-1