



Arbeitsblatt des Monats

Jan / 24

Knobelaufgabe zum Jahreswechsel 2023, 2024

Die Variablen stehen für ganze Zahlen ungleich Null.
Löse das Gleichungssystem.

$$\text{I: } a + bc = 2024$$

$$\text{II: } ab + c = 2023$$

Tipp 1: Subtrahiere die Gleichungen.

Tipp 2: Schreibe den linken Term mit Faktoren.

Tipp 3: Genauer: Klammere a aus zwei Termen aus und c aus zwei Termen.

Tipp 4: Nach Umformung lässt sich ein Klammerterm ausklammern.

$$\text{Zwischenergebnis: } (1 - b)(a - c) = 1$$

Tipp 5: Es gibt nur zwei mögliche ganze Zahlen für die Terme in den Klammern.

Tipp 6: Setze die Ergebnisse für b und für a/c in die erste Gleichung oben ein.

Tipp 7: Mit bekanntem b (aus 5) und c (aus 6) lässt sich a berechnen.

Viel Spaß beim Knobeln!

Bearbeitung

Tipp 1: I – II: $a + bc - ab - c = 1$

Tipp 2,3: $a(1 - b) + c(b - 1) = 1$

Tipp 4: $a(1 - b) - c(1 - b) = 1$
 $(1 - b)(a - c) = 1$

Tipp 5: $1 \cdot 1 = 1$ oder $(-1) \cdot (-1) = 1$

Der erste Fall passt nicht, da sich dann $b = 0$ ergibt, was laut Voraussetzung nicht erlaubt ist.

$1 - b = -1$ führt auf **$b = 2$** . $a - c = -1$ führt auf $a = c - 1$.

Tipp 6: $a + bc = 2024$ ergibt $c - 1 + 2c = 2024$ bzw. $3c = 2025$ und **$c = 675$** .

Tipp 7: $ab + c = 2023$ ergibt $2a + 675 = 2023$ bzw. $2a = 1348$ und **$a = 674$** .

Probe:

I: $a + bc = 2024$ ergibt $674 + 2 \cdot 675 = 2024$

II: $ab + c = 2023$ ergibt $674 \cdot 2 + 675 = 2023$

Plausibles Schätzen:

Egal, ob a oder c mit b multipliziert wird, es kommt fast dasselbe heraus. Das bedeutet, dass a und c in etwa gleich groß sind. b muss möglichst klein (und positiv) sein, damit sich keine zu großen Unterschiede bei der Multiplikation ergeben. Ich schätze $b = 2$.

Dann gilt etwa I: $a + 2a = 2024$ bzw. $a = 674 \frac{2}{3}$. Also wird eine Zahl 674, die andere 675 lauten. Probieren liefert das Ergebnis oben.

Ein kleines Mathe-Knobelproblem zum Jahreswechsel 2023/2024. Es geht um ein Gleichungssystem – zwei Gleichungen mit drei Variablen. Aber es ist – mit einigen Tipps und Hinweisen – lösbar. Die Tipps und das Zwischenergebnis passen gut auf abholbare Lösungskärtchen. Es ist geeignet für Klasse 9/10 und für die Oberstufe.

Das `plausible Schätzen` passt gut in ein Unterrichtsgespräch mit der ganzen Klasse.

Übrigens: Selber knobeln macht auch Spaß!