Arbeitsblatt: Simulationen

Manchmal ist es ganz schön schwer, die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis durch Überlegungen und Rechnungen zu bestimmen. Es gibt sogar Probleme, bei denen auch ein richtig guter Mathematiker keine einfache Lösung finden kann. Dann gibt es aber eine andere Möglichkeit: Man kann das Experiment simulieren. Das bedeutet, dass man sich ein Experiment ausdenkt, dessen Durchführung genau das Ereignis beschreibt. Diese Simulation nennt man ein Modell des Problems.

Aufgabe Du sollst selbst Simulationen erfinden und durchführen, um Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen

Hier findest Du zunächst einige Beispiele:

Beispiel 1: Statt eines Münzwurfes (Kopf oder Zahl) kannst Du auch einen Würfel werfen. Wenn Du die Zahlen 1,2 oder 3 würfelst ist das „Kopf“, wenn man 4, 5 oder 6 würfelt, ist das „Zahl“.

Aufgabe 1: Denke Dir eine andere Möglichkeit aus, wie Du einen Münzwurf simulieren könntest, wenn Du keine Münze zur Hand hast. Probiere sie aus und beschreibe sie so wie oben im Beispiel.

(z.B.: Du hast 2 Streichhölzer …., oder: Du hast einen Tetraederwürfel …. oder: Du hast den Würfelzylinder …. oder: Du hast eine Heftzwecke oder: … Du hast verschiedenfarbige Plättchen …)

Beispiel 2: Statt eines Wurfs mit dem Tetraederwürfel (mögliche Ergebnisse 1, 2, 3 oder 4) könntest Du einen Würfel mit den Zahlen 1 bis 6 nehmen und die Zahlen 5 und 6 mit einer 1 und einer 2 überkleben.

Aufgabe 2: Wirf sechzigmal mit einem solchen Würfel und notiere, wie oft Du die 1, 2, 3 und 4 würfelst. Beurteile dann, ob das eine passende Simulation für den Tetraederwurf ist.

Zum Weiterdenken 1: Denke Dir eine andere Möglichkeit aus, wie Du einen Tetraederwurf simulieren könntest und beschreibe ihn!

Zum Weiterdenken 2: Noch ein Vorschlag für eine Simulation des Tetraederwürfels: Wirf 3 zweifarbige Chips gleichzeitig. Die Anzahl der roten Seiten plus 1 ist die gewürfelte Zahl; so kann man Zahlen von 1 bis 4 „würfeln“.

Beispiel 3: Du sollst einen Test machen, in dem Du fünf Fragen gestellt bekommst. Bei jeder Frage gibt es zwei Antwortmöglichkeiten und Du musst die richtige Antwort ankreuzen. Wenn Du mindestens 3 der Fragen richtig beantwortest, hast Du den Test bestanden.

Angenommen, Du hast nicht für den Test gelernt; bei allen Fragen kannst Du nur raten, welches die richtige Lösung ist. Wir wollen herausfinden, wie wahrscheinlich es ist, dass Du den Test bestehst.

Trage erst Deine Vermutung ein: Den Test bestehe ich mit ungefähr _____%iger Wahrscheinlichkeit.

Die Durchführung dieses Tests simuliert ihr, indem ihr 5 zweifarbige Chips (rot/gelb) werft. Die Anzahl der roten Seiten ist die Anzahl der richtig angekreuzten Lösungen

Aufgabe 3: Führe die Simulation so oft durch, bis die Lehrerin das Stopp-Signal gibt. Trage nach jedem Wurf in einer Strichliste ein, ob Du den Test geschafft hast („☺“) oder nicht („☹“).

Aufgabe 4: Bestimme nun die relative Häufigkeit der beiden Ereignisse („☺“) und („☹“), um eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeiten zu erhalten. Vergleiche mit Deiner Schätzung!

Lehrerkommentar: Simulationen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung
Das Ziel: Die Lernenden entwickeln für konkrete Zufallsversuche Modelle, mit denen sie unter Verwendung von geeigneten Zufallsgeräten Versuche simulieren können. Sie nutzen diese Modelle, um Wahrscheinlichkeiten näherungsweise zu bestimmen und bewerten die Brauchbarkeit des Modells.
Das AB kann eingesetzt werden, sobald die ersten Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (bis zum empirischen Gesetz der großen Zahlen) gelegt sind. Es handelt sich um den ersten Teil eines Arbeitsblattes, das demnächst in der Überarbeitung des-MUED Mathekoffers Wahrscheinlichkeit veröffentlicht werden soll. Die Aufgaben des Original-AB, die wir hier herausgelassen haben und die der Differenzierung dienen findet man am Ende dieser Datei.
Wir freuen uns deshalb über kritische Rückmeldungen und Verbesserungsvorschläge, damit wir diese berücksichtigen können. Bitte schreibt an: <mued@mued.de>.

Material
Alles ist möglich und soll möglichst von den Lernenden ausgewählt werden. Wenn z.B. keine zweifarbigen Plättchen vorhanden sind, kann man Münzen nehmen …
Möglicher Unterrichtseinsatz / Differenzierung
Voraussetzungen:
Empirisches Gesetz der großen Zahlen.
Ziele / leitende Fragestellungen:
Die Lernenden entwickeln für konkrete Zufallsversuche Modelle, mit denen sie unter Verwendung von geeigneten Zufallsgeräten die Versuche simulieren können. Sie nutzen diese Modelle, um Wahrscheinlichkeiten näherungsweise zu bestimmen und bewerten ihre Brauchbarkeit.
Didaktische Hinweise:
Die Beschäftigung mit Simulationen, die inzwischen ein wichtiges Werkzeug bei vielen Mathematikanwendungen darstellen, ist motivierend, weil anspruchsvolle Probleme gelöst werden können. Nebenbei wird das intuitive Verständnis für das empirische Gesetz der großen Zahlen gefördert. Sobald dieses bekannt ist und die Lernenden einen tragfähigen Wahrscheinlichkeitsbegriff besitzen, kann das AB daher an jeder beliebigen Stelle des Unterrichts eingesetzt werden. Auch der Einsatz im Vertretungsunterricht ist gut möglich.
Die Wahrscheinlichkeiten der meisten gewählten Beispiele sind auch mit Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder der Kombinatorik zu ermitteln. Dadurch ist die jeweilige gesuchte Wahrscheinlichkeit bekannt. Den Lernenden wird es jedoch in aller Regel nicht gelingen, diese Wahrscheinlichkeit durch eine theoretische Überlegung zu ermitteln. Je nachdem, welche Ziele verfolgt werden, kann man den Lernenden mitteilen, dass der Wert bekannt ist.
Die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeiten berechenbar sind, kann man auf zwei unterschiedliche Weisen verwenden: Zum einen kann man die Lernenden motivieren, indem man einen Wettbewerb veranstaltet. Wer kommt der unbekannten (theoretischen) Wahrscheinlichkeit am nächsten? Wegen des empirischen Gesetzes der großen Zahlen sind dem zwar Grenzen gesetzt. Vorrangig geht es aber darum, den Versuch durch eine passende Simulation zu modellieren und dann die Simulation möglichst häufig durchzuführen und die Durchführung zu dokumentieren und auszuwerten. Zum anderen kann man manchen Lernenden aber auch dazu ermutigen, sich der Wahrscheinlichkeiten durch theoretische Überlegungen zu nähern. Das ist z.B. im Rahmen einer Differenzierung möglich.
Simulationen lassen sich meist auch mit Hilfe einer Tabellenkalkulation erstellen. Die Verwendung solcher Simulationen sollte aber immer erst in einem zweiten Schritt erfolgen.

Zur Erstellung einer solchen Simulation ist auch eine Programmierung erforderlich. Dazu gibt es ein eigenes Arbeitsblatt, in dem die entsprechenden Kenntnisse vermittelt werden. Es kann in jedem Fall gut zur Differenzierung oder z.B. auch in einer Mathematik-AG eingesetzt werden.

Quelle für die verwendeten Beispiele:
https://kobra.uni-kassel.de/bitstream/handle/123456789/2006100414792/Kadisto6.pdf;jsessionid=B8788D11274F4581E231FF97EBCF28E4?sequence=3

Methodisches Vorgehen:

Die Aufgaben 1 und 2 werden zunächst ganz selbstständig durch die Gruppen bearbeitet. Durch die Aufgaben „Zum Weiterdenken“ können die Gruppen individuell weiterarbeiten bis von der Lehrerin ein Signal zur Unterbrechung kommt. Nun sollte ein Austausch der bisherigen Ergebnisse erfolgen. Das ist in neuen Gruppenzusammensetzungen oder im Plenum möglich.

Lösungen

Aufgabe 1

Verwendet man den Würfelzylinder mit den möglichen Ergebnisse „steht“ oder „liegt“, so findet man schon mit kleinen Versuchsreihen heraus, dass diese beiden Ergebnisse nicht gleich wahrscheinlich sind. Die Wahrscheinlichkeit für „steht“ liegt bei etwa 30%. Bei den Heftzwecken liegen die Wahrscheinlichkeiten für beide möglichen Ergebnisse allerdings dicht beieinander.

Aufgabe 2

Das ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den veränderten Würfel:

n	1	2	3	4
$p(n)$	$\frac{1}{3} \approx 0{,}33$	$\frac{1}{3} \approx 0{,}33$	$\frac{1}{6} \approx 0{,}17$	$\frac{1}{6} \approx 0{,}17$

Und hier die Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn man mit den Chips „würfelt“:

n	1	2	3	4
$p(n)$	$\frac{1}{2^3} = 0{,}125$	$\frac{3}{2^3} \approx 0{,}375$	$\frac{3}{2^3} \approx 0{,}375$	$\frac{1}{2^3} \approx 0{,}125$

Bei beiden Simulationen wird man bereits mit kleinen Versuchsreihen ziemlich sicher sein, dass hier keine Gleichverteilung vorliegt. Die Schülerinnen haben hier auch gute Chancen, dies zu begründen, vielleicht sogar die tatsächliche Verteilung herzuleiten. Das soll aber nicht das Ziel dieses AB sein.

Aufgabe 3

Wenn mit X die Anzahl der richtigen (roten) Ergebnisse gezählt wird, so ist

$$P(☺) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \left[\binom{3}{5} + \binom{4}{5} + \binom{5}{5}\right] \cdot \frac{1}{2^5} = 0{,}5$$

Aufgaben zur Differenzierung aus dem Original-AB:

Zum Weiterdenken:

Hier ist eine einfache Modellierung möglich, weil Du das Zufallsgerät Würfel direkt benutzen kannst:

a) Ein Würfel wird viermal gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens zwei der vier gewürfelten Zahlen gleich sind?

Etwas kniffliger zu modellieren:

b) Du hast 4 Karten, die mit den Zahlen 1 bis 4 beschriftet sind. Du mischt die Zahlen und legst sie verdeckt auf 4 Felder, die ebenfalls mit den Zahlen 1 bis 4 beschriftet sind. Nun drehst Du die Karten um. Gibt es mindestens eine Karte, bei der die Zahl mit der Zahl des Feldes übereinstimmen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür?

Noch etwas schwieriger

c) Wenn Du einen Schokoriegel kaufst, erhältst Du jedes Mal ein Sammelbild. Insgesamt gibt es vier verschiedene Sammelbilder. Du möchtest alle Bilder haben und kaufst erst einmal vier Schokoriegel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Du damit alle vier Bilder erhältst?
   Und wie ist es, wenn Du 8 Schokoriegel kaufst?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben von vier zufällig ausgewählten Menschen mindestens zwei im gleichen Monat Geburtstag?