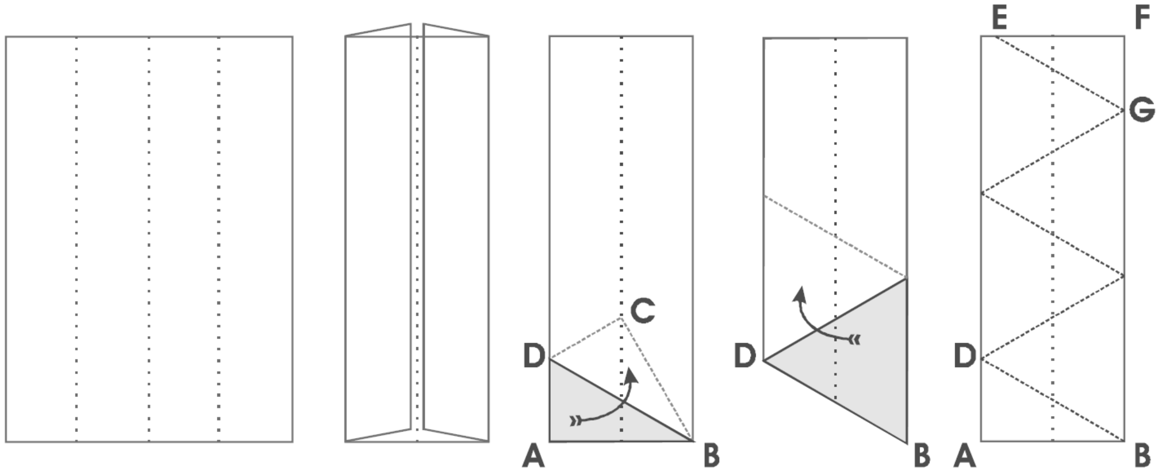
Das Tetraeder

1 | Experimentelle Lösung

Nimm dir ein DIN-A4-Blatt und baue ein Tetraeder nach der folgenden Anleitung:



Falten Sie ein DIN-A4 Blatt der Länge nach so, dass vier gleich breite Parallelstreifen entstehen. Dann klappen Sie die beiden äußeren Viertelstreifen nach innen, so dass de facto ein der Länge nach halbiertes DIN-A4 Blatt vor Ihnen liegt. Jetzt falten Sie die Ecke A so nach oben, dass diese auf der Mittellinie zu liegen kommt, also auf dem Punkt C. Nun längs der Kante DC falten, so dass die Ecke B auf der Kante AD zu liegen kommt. Diesen Vorgang wiederholen Sie noch zweimal. Wenn Sie das Blatt wieder auffalten, erkennen Sie (fast) vier gleichseitige Dreiecke sowie zwei Randdreiecke ABD und EFG. Falten Sie nun längs der durch das Falten erzielte Knicke und stecken Sie das Dreieck ABD in die Lasche bei EFG. Sie erhalten ein gleichseitiges Tetraeder.

https://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/did_geo/dateien/tetraeder-1.pdf

a) Bestimme Oberflächeninhalt und Volumen des entstandenen Tetraeders.
Hinweis: Miss dazu notwendige Längen.

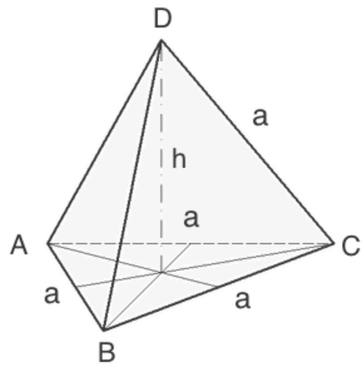
2 | Theoretische Lösung

Man kann beide Größen auch ohne Messungenauigkeiten berechnen. Dazu muss man nur wissen, dass ein DIN-A4-Blatt 21 cm breit ist.

a) Berechne mithilfe den Oberflächeninhalt des Tetraeders ohne zu messen.

Tipps zu 2a)

b) Berechne das Volumen des Tetraeders ohne zu messen.
Hinweis: Die Höhe des Tetraeders trifft genau im Schwerpunkt des Dreiecks auf die Grundfläche. Dieser liegt dort, wo sich alle drei Höhen der Grundfläche treffen. Jede Höhe wird dabei im Verhältnis 1:2, also bei einem Drittel seiner Länge geteilt.



Tipps zu 2b)

3 | Vergleich

Vergleiche deine Ergebnisse aus 1 und 2. Wodurch kommen die Abweichungen zustande?

4 | Bonusaufgabe

Ein anderes Tetraeder hat ein Volumen von 1000 cm³. Berechne seine Kantenlänge a.

Lösungen & Hinweise zum Einsatz

Das Arbeitsblatt lässt sich als Übung nach Einführung der Pyramidenformeln nutzen.

1 | Experimentelle Lösung

Individuelle Lösungen, siehe 2 für exakte Lösung. Die Schülerinnen und Schüler können ihre Ergebnisse in Gruppen vergleichen und bei sehr großen Abweichungen Fehler diskutieren. Der Unterschied zwischen räumlicher Höhe und Dreieckshöhe kann hier auch nochmal verdeutlicht werden.

2 | Theoretische Lösung

Die Aufgabe kann auch als Hausaufgabe eingesetzt werden, da durch die gestuften Hilfen (QR-Code) individuelles Weiterkommen möglich ist. Den Lernenden sollte beim Einsatz im Unterricht der Einsatz von Endgeräten zum Abruf der Hilfen ermöglicht werden.

Ansatz

Ein Tetraeder besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken, die jeweils eine Höhe von 10,5 cm haben (siehe Bastelanleitung, halbes DIN-A4-Blatt mit 21 cm Breite).

Berechnung von a

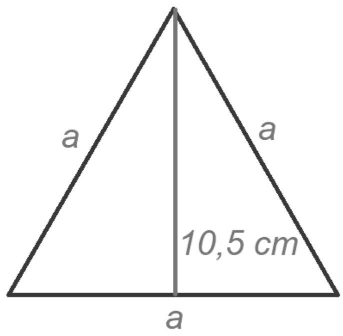
$$(\tfrac{a}{2})^2 + 10,5^2 = a^2$$

$$\tfrac{a^2}{4} + 10,5^2 = a^2$$

$$110,25 = 0,75a^2$$

$$147 = a^2$$

$$a \approx 12,12$$



Berechnung der Oberfläche

$$A_{Dreieck} = 0,5 \cdot a \cdot h_a = 0,5 \cdot 12,12 \cdot 10,5 = 63,63$$

$$O = 4 \cdot 63,63 = 254,52$$

Der Oberflächeninhalt beträgt ca. 254,52 cm^2.

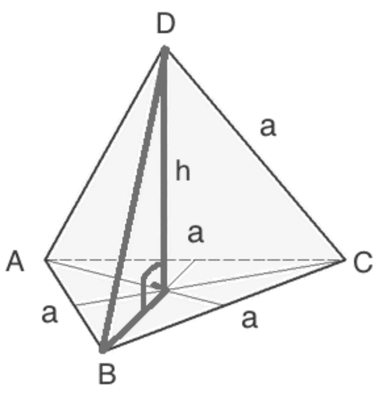
Berechnung der räumlichen Höhe

Man wählt ein rechtwinkliges Dreieck, das die räumliche Höhe enthält. Es sind sechs verschiedene Dreiecke denkbar, eines ist hier abgebildet.

$$12,12^2 = h^2 + (\tfrac{2}{3} \cdot 10,5)^2$$

$$h^2 = 98$$

$$h \approx 9,90$$



Berechnung des Volumens

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot 63,63 \cdot 9,90 \approx 209,97$$

Das Volumen beträgt ca. 210 cm^3.

3 | Vergleich

Hier kann die Lerngruppe verschiedene Unterschiede zunächst in Einzel- oder Partnerarbeit zusammentragen und anschließend im Plenum sammeln.
Nicht nur Messungenauigkeiten (gerade bei der räumlichen Höhe), sondern auch Ungenauigkeiten beim Basteln führen zu Abweichungen.

4 | Bonusaufgabe

Lösungsweg 1

Beide Tetraeder sind ähnlich zueinander, man kann also den Streckfaktor aus beiden Volumen berechnen:

Streckung aus Aufgabe 2: $k^3 = \frac{1000}{210} = \frac{100}{21}$, also $k = \sqrt[3]{\frac{100}{21}}$

Damit streckt sich die Kantenlänge von $a = \sqrt{147}$ auf $a_{neu} = \sqrt{147} \cdot \sqrt[3]{\frac{100}{21}} \approx 20{,}40$

Also muss die Kantenlänge ca. 20,4 cm betragen.

Lösungsweg 2

Das Ganze ohne Ähnlichkeit zu lösen ist eine sehr anspruchsvolle Aufgabe für besonders leistungsstarke Schülerinnen und Schüler.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a\right) \cdot \left(\sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot h_a\right)^2}\right) \end{aligned}$$

Für h_a gilt im gleichseitigen Dreieck:

$$h_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

Damit folgt für das Volumen:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a\right) \cdot \left(\sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2}\right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}} a^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3}} \cdot a \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a^3 \\ &= \frac{1}{3\sqrt{8}} a^3 \end{aligned}$$

So kann a berechnet werden:

$$1000 = \frac{1}{3\sqrt{8}} \cdot a^3$$

$$a^3 = 3000 \cdot \sqrt{8}$$

$$a \approx 20{,}40$$

Also muss die Kantenlänge ca. 20,40 cm betragen.