

Funktionen untersuchen als durchgängiges Thema der Sekundarstufe I

Die Ausführungen basieren auf zwei Aufsätzen von Günther Malle im Mathematik lehren Heft Nr. 103 (Dezember 2000).

Wenn von Funktionsuntersuchungen die Rede ist, denkt man in erster Linie an die traditionellen "Kurvendiskussionen", die üblicherweise im 11. Schuljahr durchgeführt werden.

Doch sind Funktionsuntersuchungen schon viel früher möglich, sie bilden in einem gewissen Sinne sogar einen roten Faden durch die gesamte Schulmathematik. Dieser rote Faden soll hier angedeutet werden.

Von "Funktionsuntersuchung" kann man in einem weiten und in einem engeren Sinne sprechen.

Im **weiten Sinne**

versteht man unter einer "Funktionsuntersuchung" die Untersuchung einer Abhängigkeit zwischen Größen, wobei dieser Prozess in zwei Teilprozesse zerfällt. **Im ersten Schritt** wird die zu untersuchende Abhängigkeit **dargestellt** (zum Beispiel als Tabelle, Formel, Graf, Flussdiagramm, ...), **im zweiten Schritt** erfolgt eine **Interpretation** dieser Darstellung, das heißt, aus ihr wird Bestimmtes herausgelesen und in der jeweiligen Situation gedeutet.

In einem engeren Sinne

wird unter einer "Funktionsuntersuchung" **nur der zweite Schritt**, also **die Interpretation** einer vorliegenden Darstellung verstanden.

Malle geht von dem weiten Sinn der "Funktionsuntersuchung" aus.

Schwerpunkte bis zum 8. Schuljahr

Im Schulalltag kommt das Arbeiten mit Tabellen, Formeln und Grafen viel zu selten vor. Schülerinnen und Schüler sollen im Unterricht vor allem lernen

- solche Darstellungen anzufertigen,
- vorliegende Darstellungen in andere zu übersetzen und
- die Darstellungen in der jeweils zugrunde liegenden Situation zu interpretieren (das heißt aus ihnen möglichst viel herauszulesen).

Tabellen können bereits in der Primarstufe behandelt werden, bei Grafen, aber auch bei Formeln plädiert Malle für eine "frühe und progressive" Einführung ab dem 5. Schuljahr.

Im 5. bis 8. Schuljahr ist keine "abstrakte Funktionenlehre" notwendig. Nicht einmal das Wort "Funktion" muss fallen, geschweige "Funktionsuntersuchung".

Es genügt, wenn Abhängigkeiten von Größen in bedeutungshaltigen Situationen (arithmetischen oder geometrischen Situationen, Sachsituationen) untersucht werden. Beispiele sind die Abhängigkeit eines Preises von der Warenmenge, eines zurückgelegten Weges von der Zeit oder des Kreisflächeninhaltes vom Radius.

Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler lernen, Tabellen, Formeln, Grafen und gegebenenfalls weitere Darstellungen anzufertigen und in der jeweiligen Situation zu interpretieren.

Dies reicht für die Bedürfnisse des Alltagslebens aus, denn im Alltag geht es nicht um abstrakte Funktionen, sondern um Abhängigkeiten inhaltlich deutbarer Größen.

In dieser Phase

- soll der "*semantische Hintergrund*" zum späteren Funktionsbegriff erworben werden,
- der in erster Linie aus *intuitiven Vorstellungen* und
- *vorbegrifflichem Handlungswissen* in Bezug auf Abhängigkeiten besteht.

Erst wenn dieser Hintergrund vorhanden ist, hat es einen Sinn, ab dem 9. Schuljahr eine formalere Funktionenlehre zu entwickeln, in der die auftretenden Variablen nicht mehr zwangsläufig inhaltlich gedeutet werden.

Leider wird einer solchen inhaltlich-semantischen Vorphase in diesem wie in vielen anderen Gebieten der Schulmathematik zu wenig Raum gegeben und es wird meist zu schnell auf eine abstrakt-formale Ebene aufgestiegen.

Welche Defizite treten beim Interpretieren von Grafen auf?

Bilder sind nicht selbst erklärend. Das gilt besonders für Funktionsgrafen. Man muss erst lernen, sie zu lesen. Viele Schülerinnen und Schüler kommen nicht von selbst darauf, wie Funktionsgrafen gemeint sind. Zahlreiche empirische Untersuchungen haben demgemäß große Defizite beim Interpretieren von Funktionsgrafen zutage gefördert.

Ein verbreitetes Missverständnis besteht z. B. darin, dass Funktionsgraphen als fotografische Abbilder von Realsituationen angesehen werden. So meinen etwa viele Schülerinnen und Schüler bei der Zeit-Ort-Funktion eines Autos, dass das Auto eine Linkskurve fährt. Bei dem ähnlich aussehenden Grafen, der das Wachstum einer Bakterienkultur darstellt, passiert ihnen dieser Fehler bezeichnenderweise nicht.

Zwei Aspekte beim Interpretieren

Eine Funktion ähnelt einer Medaille mit zwei Seiten. Nur wer beide kennt, kann Funktionen sinnvoll untersuchen.

Jede Funktion weist zwei fundamentale Aspekte auf: *Zuordnung*: Jedem x wird genau ein $f(x)$ zugeordnet.

Kovariation: Wird x verändert, so ändert sich $f(x)$ in einer bestimmten Weise und umgekehrt.

Der Ausdruck "Kovariation" (engl. "covariation") ist in der deutschsprachigen Literatur eher unüblich, wird aber in der jüngeren amerikanischen Literatur häufig verwendet. Er drückt meines Erachtens in recht einprägsamer Weise aus, worum es geht, nämlich um ein "Ko-Variieren", das heißt "Miteinander-Variieren" der beiden Variablen. In der deutschen Literatur entspricht dieser Begriff in etwa dem Begriff "Funktionales Denken" im Sinne Felix Kleins beziehungsweise dem Begriff "systematische Veränderung" im Sinne Vollraths.

Beim Zuordnungsaspekt wird die Funktion jeweils nur lokal betrachtet, beim Kovariationsaspekt ist eine globalere Sichtweise der Funktion notwendig.

Wo treten die Aspekte auf?

Beide Aspekte sind praktisch immer präsent. Man kann sie an jeder Darstellung einer Funktion erkennen - manchmal besser, manchmal schlechter. Man kann etwa eine Tabelle "waagerecht" (zeilenweise) lesen und kann dabei für jedes x das zugeordnete $f(x)$ ermitteln (Zuordnungsaspekt). Man kann sie aber auch "senkrecht" (spaltenweise) lesen und dabei ermitteln, wie sich $f(x)$ verändert, wenn sich x in einer bestimmten Weise ändert (Kovariationsaspekt). Auch an einem Grafen kann man einerseits für ein bestimmtes x das zugeordnete $f(x)$ ablesen (Zuordnungsaspekt), andererseits kann man aber auch erkennen, wie sich $f(x)$ ändert, wenn sich x in

bestimmter Weise ändert (Kovariationsaspekt). Sogar an einer Formel können Geübte beide Aspekte erkennen. Allerdings ist nur der Zuordnungsaspekt direkt zu sehen, der Kovariationsaspekt muss indirekt erschlossen werden. Hier sind einige typische Fragestellungen aufgeführt, die jeweils auf einen dieser beiden Aspekte abzielen:

Typische Fragen zum Zuordnungsaspekt:
<ul style="list-style-type: none"> • Welches $f(x)$ gehört zu einem bestimmten x? • Welches x gehört zu einem bestimmten $f(x)$?
Typische Fragen zum Kovariationsaspekt:
<ul style="list-style-type: none"> • Wie ändert sich $f(x)$, wenn x wächst? • Wie muss sich x ändern, damit $f(x)$ fällt? • Wie ändert sich $f(x)$, wenn x verdoppelt wird? • Wie muss x geändert werden, damit sich $f(x)$ verdreifacht? • Wie ändert sich $f(x)$, wenn x um 1 erhöht wird? • Wie muss x geändert werden, damit $f(x)$ um 2 erniedrigt wird?

Verfügbarkeit beider Aspekte durch Schülerinnen und Schüler

Es ist bemerkenswert, dass in der üblichen Definition einer Funktion nur der Zuordnungsaspekt hervorgehoben wird. Man definiert ja: Eine Funktion ist eine Zuordnung, die jedem Element x einer Menge A genau ein Element $f(x)$ einer Menge B zuordnet. Von Kovariation ist hier nicht die Rede. Für einen formalen Aufbau der Mathematik reicht dies aus. Für das praktische Arbeiten mit Funktionen ist der Kovariationsaspekt jedoch unentbehrlich. Wer diesen Aspekt nicht kennt und nur das weiß, was die Definition einer Funktion ausdrückt, kann in der Praxis mit Funktionen so gut wie nichts anfangen.

Empirische Untersuchungen zeigen jedoch, dass im Bewusstsein der Schülerinnen und Schüler sowohl der Zuordnungsaspekt als auch der Kovariationsaspekt unterentwickelt sind. Besondere Defizite sind in Hinblick auf den Kovariationsaspekt zu verzeichnen, der oft so gut wie nicht verfügbar ist.

Was im 5. bis 8. Schuljahr versäumt wird, ist ab dem 9. Schuljahr nur mehr schwer aufzuholen. Untersuchungen unterstreichen die Wichtigkeit, im 5. bis 8. Schuljahr dafür zu sorgen, dass sich im

Bewusstsein der Schülerinnen und Schüler sowohl der Zuordnungsaspekt als auch der Kovariationsaspekt entwickelt - und zwar im Zusammenhang mit inhaltlichen Interpretationen von Funktionsgraphen. Fehlen diese Aspekte, wird jede Weiterarbeit in einer abstrakten Funktionenlehre ab der 9. Klasse nur ein "sinnleeres Gerede ohne intuitiven Hintergrund".

Liebe MUEDe!

Wer von Euch möchte auf der kommenden Wintertagung eine AG anbieten?

Es handelt sich um unsere Jubiläums-Tagung, auf der wir das 25-jährige Bestehen der MUED feiern werden!

Sie findet vom 31.10. bis 03.11.02 im Haus Villigst in Schwerte statt. Die AG-Blocks werden voraussichtlich am Freitag (01.11.) und am Samstag Vormittag (02.11.) liegen.

Da die AG-Planung demnächst in verschiedenen mathematik-didaktischen Zeitschriften abgedruckt werden soll, ist Eile geboten.

Bitte schickt die AG-Angebote - am besten per eMail - jetzt an mich:
Corina Kress
Berger Marktplatz 3
60388 Frankfurt/M.
kress@math.uni-frankfurt.de

Corina