

# Funktionale Abhängigkeiten und dynamische Geometrie Software:

Andreas Koepsell

Dynamische Geometrie Software<sup>1</sup> ist eigentlich nicht für die Behandlung des Themas Funktionen konzipiert. Ich möchte hier auf keinen Fall den Eindruck erwecken, als vertrete ich die Meinung, dass heute zu möglichst jedem Thema und in jeder Lerngruppe mit dem Computer gearbeitet werden sollte.

Wichtig ist ein methodisch vielseitiger Unterricht, in dem möglichst viele Lernertypen durch unterschiedliche Aufgabenstellungen und Lösungswege angesprochen werden. In einem solchen Unterricht sollte auch mit dynamischer Geometrie Software zum Thema Funktionen gearbeitet werden. Der Einsatz solcher Computerprogramme ist unter drei unterschiedlichen Gesichtspunkten möglich:

- Kovariations Aspekt
- Funktionen und Ortskurven
- Parameter-Kurven

## A. Versuche zum Kovariations Aspekt!

In dem Artikel von Wilfried wird der Begriff der Kovariation erläutert. Dieser Aspekt betrachtet die dynamische Abhängigkeit und Veränderung zweier Größen. Dies wird mit DynaGeo folgendermaßen dargestellt: Auf zwei parallelen Geraden befinden sich die beiden Punkte X und Y. Der Punkt X auf der unteren Geraden kann bewegt werden. Y bewegt sich dann auf der oberen Gerade in Abhängigkeit von X.

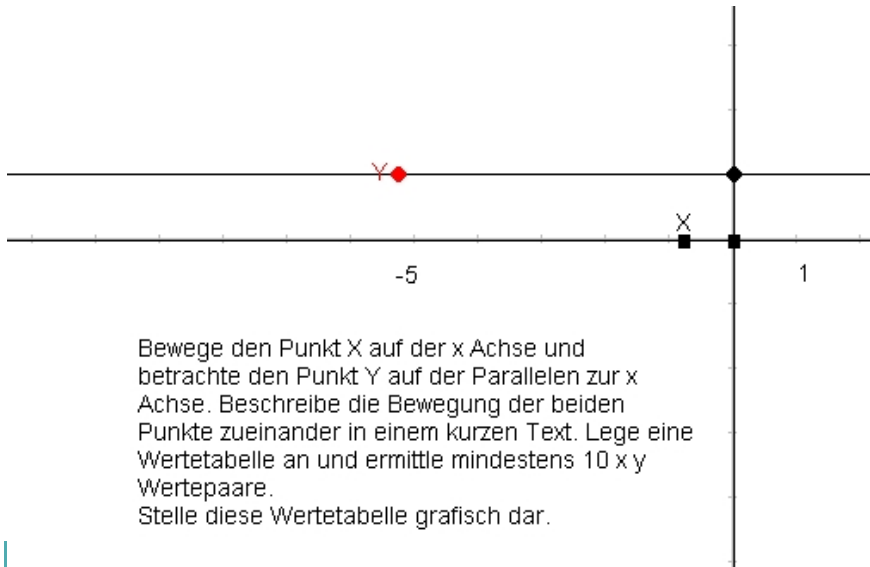
Abhängigkeiten sollen im Text beschrieben werden. Danach wird eine Wertetabelle aufgestellt und der Funktionsgraph gezeichnet.

Die Idee wurde in „mathematik lehren“ Heft 103 schon beschrieben und auch mit DynaGeo Dateien entwickelt. Da bei diesen Arbeitsaufträgen die Schülerinnen und Schüler in der Regel nicht konstruieren sollen, ist das Programm DynaGeo und seine Konstruktionselemente überflüssig.

Ich habe eine html Datei erstellt. Innerhalb dieser Datei bleiben die dynamischen Eigenschaften erhalten. Schüler / Schülerinnen können verschiedene Beispiele aufrufen, die Veränderungen

---

1 Das von mir verwendete dynamische Geometrieprogramm ist DynaGeo 2.4 von Roland Mechling. Es ist als Shareware Programm unter der Adresse [www.dynageo.de](http://www.dynageo.de) erhältlich. Verbreiteter ist der alte Name des Programms „Euklid“.



## Kovariationen und Funktionen

Im Folgenden sind verschiedenen Aufgaben dargestellt, die die Bewegung zweier Punkte auf parallelen Geraden zeigen. Der Punkt X kann jeweils bewegt werden. In Abhängigkeit davon bewegt sich der Punkt Y auf der parallelen Geraden.

Die Aufgabenbearbeitung kann in jeder Teilaufgabe in folgenden Schritten erfolgen:

- 1.: Beobachtung der abhängigen Bewegungen
- 2.: Beschreibung der Abhängigkeiten in einem kurzen Text
- 3.: Aufstellen einer Wertetabelle mit mindestens 10 Wertepaaren
- 4.: Grafische Darstellung der Bewegungen in einem Koordinatenkreuz.
- 5.: Konstruktion der Bewegung und der Grafischen Darstellung mit "Euklid"

Beispiel 1:

Beispiel 2:

Beispiel 3:

Beispiel 4:

Beispiel 5:

Beispiel 6:

Beispiel 7:

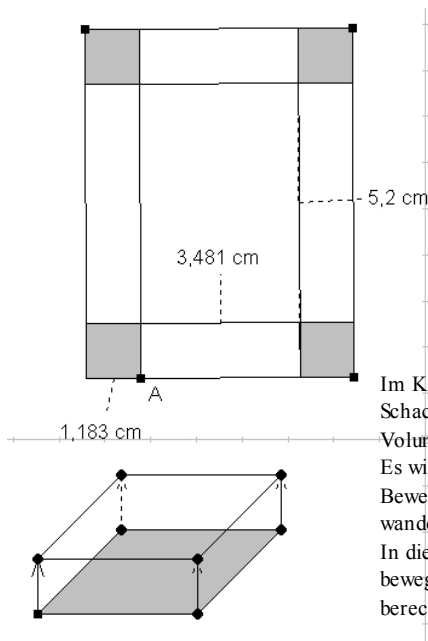
Beispiel 8:

betrachten und Tabellen und Grafen erstellen. Dadurch ergeben sich erhebliche Vorteile in der Handhabung für Lehrerinnen und

Lehrer: Man braucht lediglich die Dateien auf den Rechnern der Schule oder im Schulnetz zu installieren und schon sind die dynamischen Arbeitsblätter von Schülerinnen und Schülern nutzbar. Internetadresse: [www.erz.uni-hannover.de/~koepsell/start.html](http://www.erz.uni-hannover.de/~koepsell/start.html)

## B. Funktionale Darstellungen mit Hilfe von Ortskurven

Jeder Mathematik Lehrer kennt dieses Beispiel: Aus einem rechteckigen Blatt Papier werden an jeder Ecke je ein Quadrat herausgeschnitten, um die Restfläche zu einer nach oben offenen Schachtel zu formen. Natürlich müssen im Unterricht solche Schachteln gebaut, sortiert und bewertet werden. Der Übergang aus dieser konkreten Situation zur Herleitung einer Funktionsgleichung unter Verwendung von Variablen und die Betrachtung des Funktionsgraphen ist erheblich. Es ist der Schritt in das formale System der Mathematik. Die Deutung der Volumenfunktion mit Verläufen auch im negativen Bereich ist nach wie vor für viele Schülerinnen / Schülern schweurig und für viele teilweise auch nicht möglich. Hier kann die dynamische Geometrie Software verständnisfördernd wirken.



Im Koordinatenkreuz soll die Volumenfunktion dieser Schachtel dargestellt werden. Dazu wird zunächst das Volumen der Schachtel berechnet.

Es wird ein Punkt konstruiert, der in Abhängigkeit der Bewegung des Punktes A auf der x-Achse nach rechts wandert.

In diesem Punkt wird eine Lotgerade errichtet. Auf dieser bewegt sich ein zweiter Punkt in Abhängigkeit des berechneten Volumenwertes.

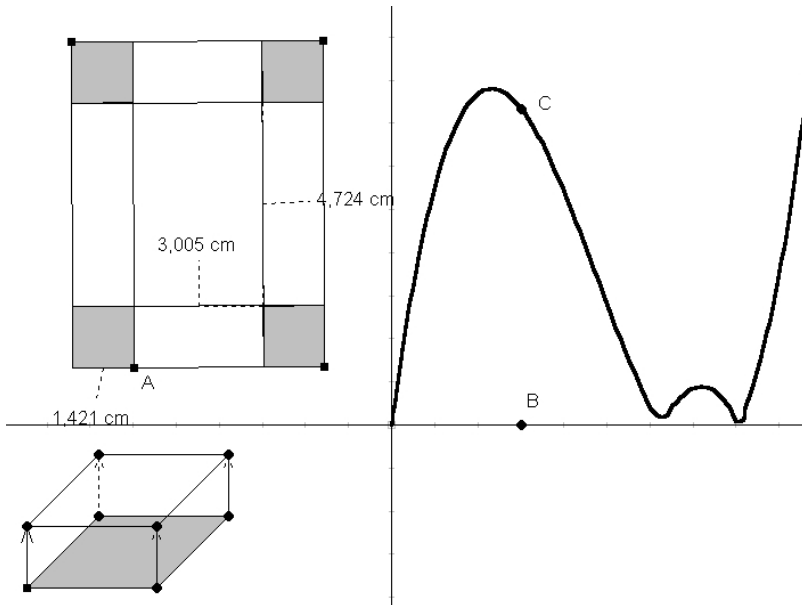
Im abgebildeten Beispiel ist links oben das Rechteck zu sehen. Der Punkt A kann auf der unteren Rechteckseite bewegt werden und verändert die Größe der Quadrate. Darunter wird die Schachtel, die sich aus dem Rechteck falten lässt, in der Schrägbildperspektive dargestellt. Man sieht, wie sich das Volumen der Schachtel ändert.<sup>2</sup>

Um nun die Volumenfunktion als Ortskurve darstellen zu können, müssen folgende Befehle ausgeführt werden:

- Das Koordinatenkreuz wird sichtbar gemacht. (Ordner „Messen & Rechnen“)
- Befehl: „Kreis mit bestimmten Radius“ Als Radius wählt man die Länge der Quadrate. Diese Länge wird als veränderbare Länge eingegeben. Der Mittelpunkt des zu bildenden Kreises ist der Ursprung. Bewegt man nun den Punkt A, so verändert sich der Radius des Kreises.
- Man erzeugt die Schnittpunkte zwischen dem eben konstruierten Kreis und der x-Achse. Der linke Schnittpunkt und der Kreis selber werden versteckt. Nun bewegt sich beim Ziehen des Punktes A ein Punkt auf der x-Achse. Diesen benennen wir mit B.
- In B erzeugen wir eine Lotgerade zur x-Achse
- In B wird ein weiterer „Kreis mit bestimmtem Radius“ konstruiert. Als Radius gibt man das Produkt aus Länge, Breite und Höhe der Schachtel ein.
- Man erzeugt den Schnittpunkt zwischen diesem Kreis und der Lotgeraden. Der untere Schnittpunkt, der Kreis und die Lotgerade können versteckt werden. Der obere Schnittpunkt wird mit C benannt.
- Nun wird die Ortskurve (ein Befehl in der Hauptleiste) des Punktes C aufgezeichnet. Diese Ortslinie stellt die Volumenfunktion dar.

---

2 Natürlich kann man mit Schülern auch diese Konstruktion erstellen. Wenn der Umgang mit einer dynamischen Geometrie Software geübt wurde (ab der 7. Klasse sinnvoll), dann ist eine solche Konstruktion spätestens im 9. Jahrgang möglich.



Eine genaue, gemeinsame Betrachtung des Grafen schließt sich an. Wo ist das gesuchte Maximum? Was sind dort für merkwürdige „Nullstellen“ zu entdecken? Warum gibt es Knicke in der Kurve? Die Antwort ist eigentlich einfach: Abstände in einer Konstruktion sind immer positiv. Das Produkt dreier Abstände kann daher auch nicht negativ werden.<sup>3</sup>

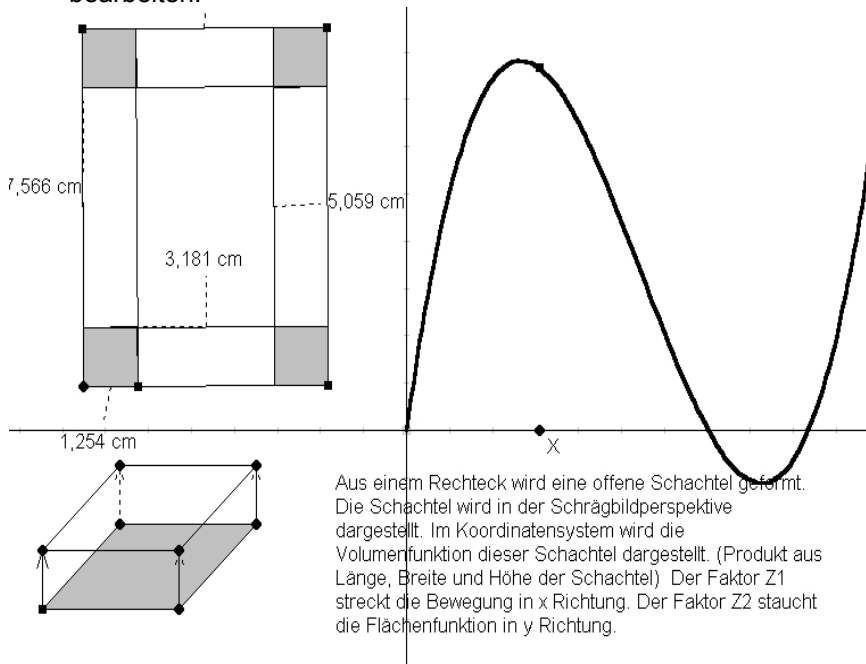
Man kann die Konstruktion verändern: Bislang haben wir die drei Größen, die das Volumen bestimmen, gemessen und eingegeben. Wir messen jetzt die Abmessungen des Rechtecks und als einzige veränderbare Größe die Länge  $x$ .  $x$  bezeichnet die Kantenlänge der vier quadratischen Abschnitte. Nun bauen wir die Konstruktion so auf, dass die Länge und Breite der Grundfläche die Differenz der zweier Größen werden.<sup>4</sup> Die nächste Abbildung zeigt die veränderte Konstruktion. Wir erhalten eine Funktion mit negativen Bereichen. Wenn  $x$  größer wird als die halbe Rechteckbreite, so ist die Schachtelbreite negativ.

Wer mag, kann nun zur Aufstellung der Funktionsgleichung

3 Da wir in der Zeichnung Entfernungen gemessen haben, kann sich kein negatives Produkt als Volumen bilden.

4 Länge der Grundfläche der Schachtel: Rechtecklänge  $- 2x$   
 Breite der Grundfläche der Schachtel: Rechteckbreite  $- 2x$   
 Höhe der Schachtel:  $x$

übergehen und mit dem traditionellen Werkzeug die Aufgabe bearbeiten.



## C. Parameter Kurven mit DynaGeo (Euklid)

Mit DynaGeo lassen sich leicht Parameterdarstellungen von recht unterschiedlichen Funktionsarten herstellen. Dies ist erst mit der neuen Version 2.4. leicht möglich, da in dieser Version die Erstellung eines Zahlobjektes möglich wurde.



Zunächst sei das Vorgehen an einem einfachen Beispiel erläutert: Es soll eine einfache quadratische Funktion erzeugt werden. Dabei geht man wie folgt vor:

- Das Koordinatenkreuz wird sichtbar gemacht.
- Man setze einen Punkt auf die x Achse des Koordinatenkreuzes (Befehl: Punkt auf eine Linie) und benenne ihn mit X.
- Man erzeugen einen Punkt (Befehl: Punkt mit den Koordinaten x,y). Als x und y Koordinaten gibt man nun nicht feste Werte ein, sondern Terme und Variablen.

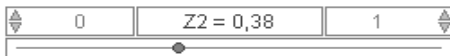
Für die x Koordinate wird eingegeben: cx(X) (cx bedeutet x

Koordinate;  $cx(X)$  bedeutet x Koordinate des Punktes X)

Für die y Koordinate:  $cx(X)^2$

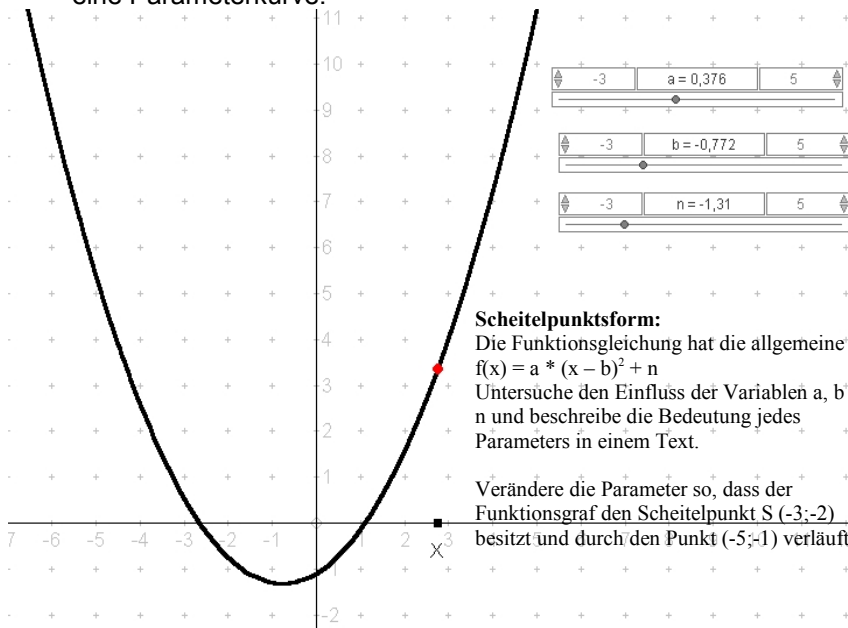
- Nun wird die Ortslinie (Befehl in der Hauptleiste) des eben erzeugten Punktes aufgezeichnet und man erhält die Normalparabel.

In einem weiteren Schritt können Parameter Kurven erstellt werden. In dem Ordner „Messen und Rechnen“ gibt es den Befehl „Zahlobjekt erstellen“. Diesen Befehl führt man aus und erstellt durch einen Mausklick auf die Arbeitsfläche ein Zahlobjekt. Man kann den Zahlbereich editieren und natürlich auch wieder dieses Zahlobjekt benennen.



Wenn man nun dieses Zahlobjekt als Parameter

in der x oder y Koordinaten des Punktes mit einbindet, der die Ortslinie erzeugt, so entsteht bei Veränderungen am Zahlobjekt eine Parameterkurve.



Man kann mit Schülerinnen und Schülern solche Konstruktionen erstellen oder die fertigen Dateien werden von den Schülerinnen und Schüler geladen und sie bearbeiten vorher verschriftlichte

Arbeitsaufträge. Die Beschreibung der Veränderungen ist das wichtigste Ziel.

Das Programm DynaGEO wurde von Roland Mechling erstellt und ist als Shareware unter [www.dynageo.de](http://www.dynageo.de) erhältlich.

# EUKLID

## DYNA GEO



Geometrie (wie) mit Zirkel und Lineal

Version 2.4a (c) 1994/2001 Roland Mechling