MUED

Mathematik zum BeGreifen

MATHE KOFFER

Zaubern – Spielen – Knobeln

- verständnisorientiertes Lernen
- vielfältige Zugänge
- Experimente und Entdeckungen
- Differenzieren und Üben

Uli Brauner
Hans Bröskamp
Birgit Griese

Mathekoffer — Zaubern – Spielen – Knobeln

Inhaltsverzeichnis

Als Anrede haben wir in dieser Broschüre die weibliche Form „Lehrerinnen" und „Schülerinnen" gewählt, stellvertretend natürlich auch für alle „Lehrer" und „Schüler".

Mathekoffer Zaubern – Spielen – Knobeln
Preis: 25,00 €
3. Auflage, Nottuln-Appelhülsen 2016

ISBN 978-3-930197-85-9

Der Münztrick

45 Min

Kompetenzen

- Kopfrechnen: Multiplikation, Addition und Subtraktion (Komplexität ist abhängig von den eingesetzten Zahlen);
- systematisches Probieren und strukturiertes Notieren in Tabellenform

Unterrichtsverlauf

Die Lehrerin führt den Trick so vor, dass alle mitrechnen können, sie selbst aber die Verteilung der Münzen in den Händen nicht sehen kann. Hierzu empfiehlt sich eine OHP-Folie mit einer „linken“ und einer „rechten Hand“, in die eine Schülerin die Münzen hineinlegen kann. Bevor der Zauberer sich umdrehen darf, werden die „Hände“ mit einem Blatt Papier abgedeckt.

Es ergibt sich die Problemfrage der Stunde: Welche Zauberformel hat der Zauberer?

Die Schülerinnen arbeiten nun zu zweit mit jeweils 5 Münzen. Durch Probieren und systematisches Notieren finden sie eine Regel. An dieser Stelle kommt es auf die Vorerfahrungen der Klasse an: Gegebenenfalls können Hilfen zum Notieren/Protokollieren gegeben werden: „Schreibt doch mal die Zahl auf, die dem Zauberer gesagt wird und daneben die Zahl der Münzen in der rechten Hand.“ Erfahrungsgemäß merken sich die Schülerinnen die gesamte Tabelle. Daher wird auf dem Arbeitsblatt der Hinweis gegeben, eine möglichst einfache Zauberformel zu finden. Eine mögliche Lösung besteht darin, von der dem Zauberer mitgeteilten Zahl die „magische Zahl“ 15 zu subtrahieren.

Jetzt wird der Trick in der Gruppe noch ein paar Mal geprobt, so dass er von den kleinen Zauberern am Ende der Stunde vorgeführt werden kann. Dazu sollten sie auch die Zauberanleitung auswendig lernen. Erfahrungsgemäß führen die Schülerinnen den Trick mit viel Begeisterung am Nachmittag zu Hause vor. Dabei wird er weiter geübt. Für schnelle Gruppen werden Varianten des Tricks angeboten. Hier können weitere Strukturen entdeckt werden. Am Ende der Stunde sollte die Problemlösestrategie (systematisches Probieren/Notieren) thematisiert werden.

Lösungen

Besonders beeindruckend ist es, wenn ein Zuschauer die Zahl der Münzen bestimmt, mit denen „gezaubert“ wird, etwa indem er alle Münzen aus seinem Portemonnaie zur Verfügung stellt. Und auch die Faktoren werden vom Publikum bestimmt. Die Schülerinnen müssen dann ihre Zauberformel schnell anpassen:
Sei n die Zahl der Münzen und die Faktoren seinen a und a + 1. Dann muss von der dem Zauberer genannten Zahl Z das Produkt $n \cdot a$ subtrahiert werden. Wenn sich die Faktoren nicht um1 unterscheiden, wird es komplizierter: b ist der Unterschied der beiden Faktoren. l – Anzahl der Münzen in der linken, r – Anzahl der Münzen in der rechten Hand: Damit gilt: $n = l + r$

$Z = l \cdot a + (n - l) \cdot (a + b) = l \cdot a + n \cdot a - l \cdot a + n \cdot b - l \cdot b$

$\Leftrightarrow Z - n \cdot a = n \cdot b - l \cdot b$

$\Leftrightarrow (Z - n \cdot a) : b = n - l = r$

Beispiel: n = 7, Faktor 1: a = 5, Faktor 2: 7 = 5 + b und damit b = 2. Dann muss der Zauberer von der genannten Zahl Z 35 subtrahieren und das Ergebnis durch 2 teilen. Die so erhaltenen Zahl ist die Zahl der Münzen in der rechten Hand. Der Zauberer muss also gut Kopfrechnen können, wenn die Zahlen größer werden und die Faktoren sich stärker unterscheiden. Die angeführte Lösung macht deutlich, dass der Trick auch in höheren Jahrgängen noch sehr gut einsetzbar ist.

Der Münztrick

Material: 5 Münzen (oder andere Gegenstände wie z. B. Spielsteine)

Welche Zauberformel hat der Zauberer beim Münztrick?

Anweisungen
Du hast 5 Münzen.
Nimm einen Teil davon in die rechte Hand und den Rest in die linke.
Multipliziere die Zahl der Münzen in der rechten Hand mit 4.
Multipliziere die Zahl der Münzen in der linken Hand mit 3.
Addiere beide Ergebnisse und nenne dem Zauberer das Ergebnis der Rechnung.

Der Zauberer weiß nun, wie viele Münzen du in der rechten und in der linken Hand hast. Suche seine Zauberformel!

1) Spielt den Trick zu zweit durch. Probiert möglichst viele Möglichkeiten aus. Findet ihr die Zauberformel?
   Beachtet, dass die Zauberformel möglichst einfach sein muss, weil sich der Zauberer nicht so viel merken möchte.
2) Wenn ihr die Zauberformel kennt, dann probiert den Trick so lange aus, bis ihr ihn sicher vorführen könnt.
3) Zum Weiterdenken
   - Nehmt zwei Münzen mehr und lasst den Rest des Tricks gleich. Findet die neue Zauberformel.
   - **Anweisungen**
     Multipliziere die Münzanzahl in der rechten Hand mit 6, die Zahl der Münzen in der linken Hand mit 7. Addiere beide Ergebnisse und nenne dem Zauberer die Summe. Findet auch hier die Zauberformel. Nehmt wieder 7 Münzen.
   - **Anweisungen**
     Multipliziere die Münzanzahl in der rechten Hand mit 5, die Zahl der Münzen in der linken Hand mit 7. Addiere beide Ergebnisse und nenne dem Zauberer die Summe.
     Könnt ihr auch jetzt den Zaubertrick vorführen?

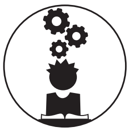
   Findet selbst eine möglichst ganz neue Veränderung der Zahlen und führt den Trick vor.

Wahlkampf

45 Min

Ein Spiel für 2 - 6 Personen

Einsatzmöglichkeit
Jahrgang 7: Prozentrechnung



Kompetenzen

inhaltlich: Grundrechenarten (Addition) mit Prozentzahlen und natürlichen Zahlen ausführen (Arithmetik/Algebra); Prozentwert bei der Vorgabe der beiden anderen Größen berechnen (Funktionen)

prozessbezogen: Planung von Vorgehensweisen zur Lösung des Problems, über die Wahl eines geeigneten Weges auf dem Spielfeld eine möglichst große Endsumme zu erreichen (Problemlösen); Anwenden verschiedener Problemlösestrategien wie „Vorwärtsrechnen", „Rückwärtsrechnen",„Zerlegung in Teilprobleme" und „Systematisches Probieren" (Problemlösen)

Einbettung in den Unterrichtsverlauf
Das Wahlkampf-Spiel kann sinnvoll eingesetzt werden nach Einführung der Grundaufgabe zur Prozentwertberechnung oder am Ende der gesamten Unterrichtsreihe im Rahmen von Übungsphasen.

Unabhängig vom Zeitpunkt des Einsatzes eignet sich das Spiel auch dazu, zum einen unter-schiedliche Spielstrategien zu besprechen sowie zum anderen in einem fächerübergreifenden Projekt zum Thema Wahlkampf eingebettet zu werden.

Varianten

a) Es kann ein Zahlenstapel mit anderen %-Sätzen genommen werden.

b) Mit weniger Städten auf dem Spielplan wird ein kürzerer Spielverlauf erreicht.

c) Anstelle fiktiver Städte können auch reale Ortschaften oder Wahlkreise aus der Umgebung gewählt werden.

d) Die Berechnung der Prozentwerte für das Wahlkampfprotokoll kann wahlweise mit oder ohne Taschenrechner erfolgen, im zweiten Fall kann die Berechnung – alternativ zur Einzelarbeit – auch in Partner- oder Gruppenarbeit erfolgen.

e) Wem ein Politiker-Wahlkampf für die Schülerschaft im Jg. 7 zu abgehoben erscheint, der kann die gegebene Sachsituation auch mit geringem Aufwand abändern in eine Misswahl, eine Wahl zum Fußballer des Jahres, eine Wahl der attraktivsten Stadt eines Bundeslandes etc.

Literatur
mued: Spiele – Prozentrechnung, Sammlung 07-02-05, Appelhülsen, Seiten C12 - C15.

Wahlkampf

Ein Spiel für 2 – 6 Personen

Material
Spielplan
1 Spielstein und 13 Chips (farbige Büroklammern o. ä.) pro Person
1 Sechserwürfel
Zahlkarten von 1 - 20
1 Wahlkampfprotokoll pro Person
1 Taschenrechner zur Spielkontrolle

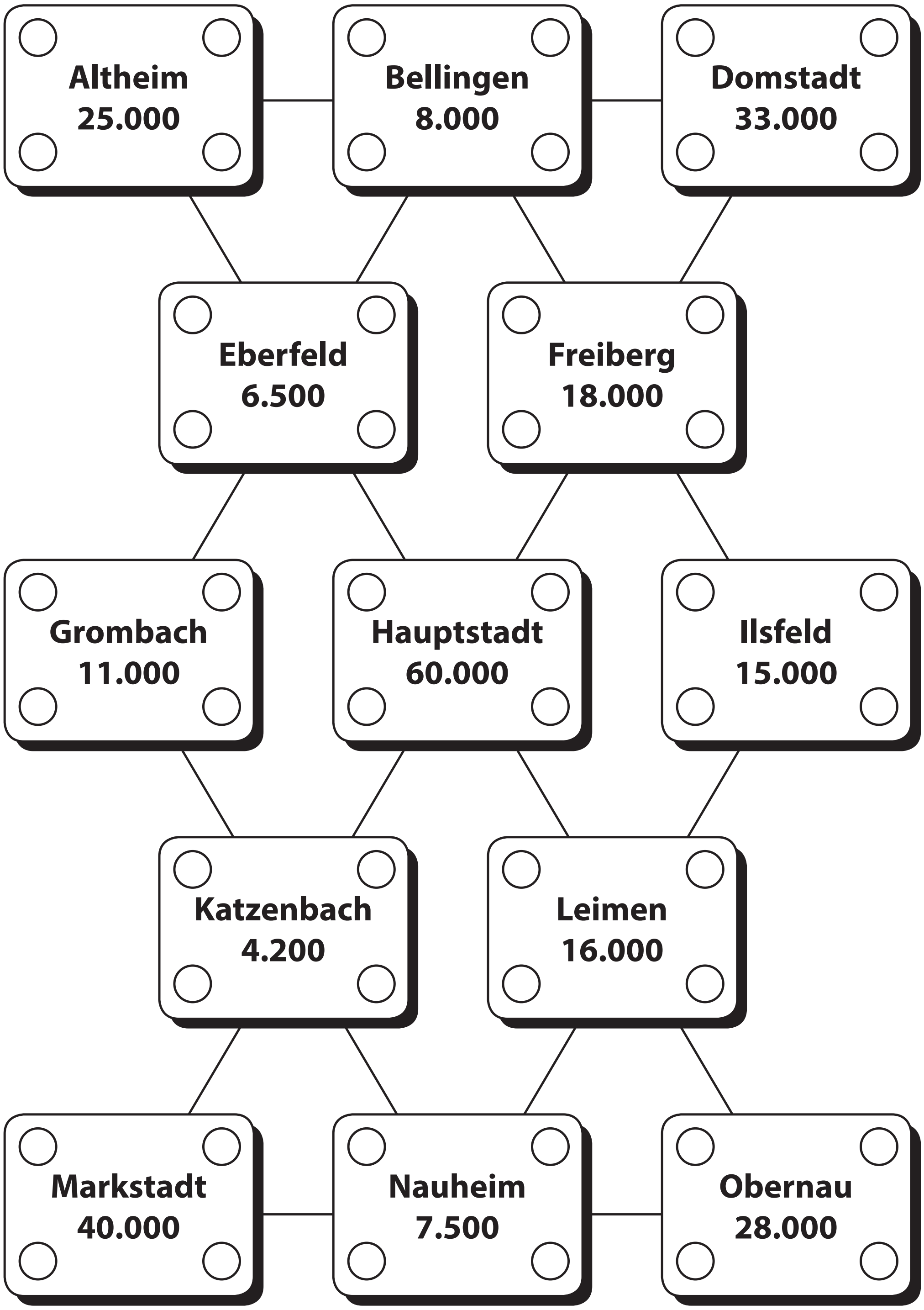
Spielverlauf

Jede Spielerin stellt zu Beginn den Spielstein auf das Feld Hauptstadt (Mitte). Die Zahlenkarten liegen auf einem Stapel, die oberste Zahl ist sichtbar. Die dunkelste Farbe beginnt. Reihum würfelt jede Spielerin mit dem Sechserwürfel und bewegt den Spielstein entsprechend der Augenzahl über die eingezeichneten Straßen. Dabei muss der Spielstein in eine noch nicht besuchte Stadt gestellt werden. Wenn das gelingt, macht die Spielerin dort Wahlkampf. (Vorsicht: Maximal 4 Personen dürfen sich zeitgleich in derselben Stadt aufhalten.) Sie mietet ein Wahllokal (legt einen der Chips in ein rundes Feld) und lädt zu einer Versammlung ein.
Die oberste Zahlenkarte gibt an, **wie viel Prozent der Einwohnerinnen** die Wahlversammlung besuchen (in das Wahlkampfprotokoll in Spalte 4 eintragen).
Die nächste Zahlenkarte gibt an, **wie viel Prozent der Zuhörerinnen** die Kandidatin als Wähler gewinnen kann (in das Wahlkampfprotokoll in Spalte 6 eintragen). Der Wahlkampf ist zu Ende, wenn eine Spielerin sämtliche Städte besucht hat. Jede Spielerin rechnet ihre eigenen Zuhörerzahlen (Spalte 5) und daraus die Zahlen der gewonnenen Wählerinnen (Spalte 7) aus. Schließlich werden noch die Werte in der Summenzeile berechnet – und zwar von der rechten oder linken Spielnachbarin, je nach Vereinbarung. Das Spiel hat zwei Siegerinnen, diejenige mit den **meisten Zuhörerinnen** (Summe Spalte 5) ist die interessanteste Wahlrednerin, die mit der **größten Anzahl an überzeugten Wählerinnen** (Summe Spalte 7) ist die beste Wahlwerberin.
Beispiel:
Spielerin A würfelt zunächst eine 5 und setzt den Spielstein auf das (freie) Feld Markstadt (40 000 Einwohnerinnen). Die oberste Zahlkarte ist eine 7, es werden also 7 % der Einwohnerinnen von Markstadt (7 % von 40000 = 2800) die Wahlversammlung besuchen. Die nächste Zahlkarte ist eine 11, d. h. also, dass 11 % der Zuhörerinnen der Wahlversammlung (11 % von 2800 = 308) von der Kandidatin als Wählerinnen gewonnen werden.
Die erste Zeile des Wahlkampfprotokolls hat somit folgendes Aussehen haben, wobei die Werte in den Spalten 5 und 7 natürlich erst am Ende des Spiels berechnet werden:

Name:

		Spalte 3	Spalte 4	Spalte 5	Spalte 6	Spalte 7
Nr.	Ort	Einwohnerinnen	An der Versammlung nehmen ... % der Einwohnerinnen teil	An der Versammlung nehmen ... der Einwohnerinnen teil	% überzeugter Wählerinnen	Anzahl überzeugter Wählerinnen
1	**Markstadt**	**40 000**	**7 %**	**2800**	**11 %**	**308**

Anlage 1: Vorlage Spielplan – (auf kartonstarkes Papier kopieren!)



Anlage 2: Wahlkampfprotokoll

Name:

Nr.	Ort	Einwohnerinnen	An der Versammlung nehmen ... % der Einwohnerinnen teil	An der Versammlung nehmen ... Einwohnerinnen teil	% überzeugter Wählerinnen	Anzahl überzeugter Wählerinnen
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
			Summen:			

Anlage 3: Zahlkarten von 1 bis 20 (auf kartonstarkes Papier kopieren und ausschneiden!)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

ANNA-Zahlen – Lösung

45 Min

Kompetenzen

inhaltlich: Dezimalsystem, Flächenanordnung

prozessbezogen: systematisches Probieren

Einsatzmöglichkeit: ab Klasse 8

Einstellige Zahlen wollen wir nicht als ANNA-Zahlen betrachten.
Bei ANNA-Zahlen unterscheiden wir, ob sie eine gerade Anzahl 2 n oder eine ungerade Anzahl 2 n + 1 von Ziffern haben, und können sie schreiben als

$$a_1a_2 \ldots a_na_na_{n-1} \ldots a_1 \text{ bzw. } a_1a_2 \ldots a_nba_na_{n-1} \ldots a_1$$

mit den Ziffern a_i und b (im ungeraden Fall). Da die führende Zahl $a_1 \neq 0$ ist, gibt es $9 \cdot 10^{n-1}$ ANNA-Zahlen im geraden, $9 \cdot 10^n$ im ungeraden Fall (wobei wir natürlich mehrfaches Auftreten einzelner Ziffern zulassen). Alle ANNA-Zahlen mit gerader Ziffernzahl sind durch 11 teilbar, wie die Darstellung im Zehnersystem

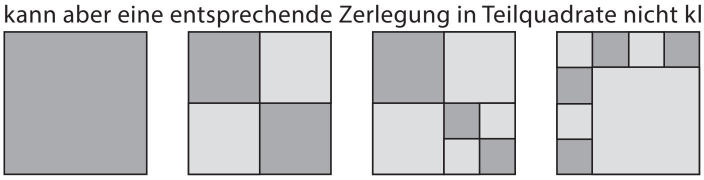
$$a_1 \cdot 10^{2n-1} + a_2 \cdot 10^{2n-2} + \ldots + a_n \cdot 10^n + a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 10^0$$

zeigt: Fasst man die Zehnerpotenzen mit den gleichen Koeffizienten zusammen, so kann man die Faktoren $10^{2n-1} + 1$, $10^{2n-2} + 10$, $10^{2n-3} + 10^2$, …, $10^n + 10^{n-1}$ ausklammern; diese Faktoren sind aber alle durch 11 teilbar. ANNA-Zahlen mit ungerader Ziffernzahl sind dagegen nur in Ausnahmefällen durch 11 teilbar. Wie die beiden Beispiele $121 = 11 \cdot 11$ und $141 = 3 \cdot 47$ zeigen, gibt es im allgemeinen keine nichttrivialen gemeinsamen Teiler.

Primzahlen, die ANNA-Zahlen sind: 11, 131, …

Nette Zahlen – Lösung
Die Abbildung zeigt, dass mit n auch n + 3 und damit auch $n + 3 \cdot s$, $s \in \mathbb{N}$, eine nette Zahl ist. Zusammen mit den schon als nett erkannten Beispielen und dem Beispiel einer Zerlegung in acht Teilquadrate folgt, dass die folgenden Zahlen nett sind:
1, 4, 7, 10, … (lassen den Dreierrest 1),
6, 9, 12, 15, … (lassen den Dreierrest 0),
8, 11, 14, 17, … (lassen den Dreierrest 2).

Damit sind alle natürlichen Zahlen bis auf 2, 3 und 5 als nett nachgewiesen. Für diese Zahlen kann aber eine entsprechende Zerlegung in Teilquadrate nicht klappen.



Die ANNA-Zahlen < 1000, die auch Primzahlen sind, lauten:
11, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757,787, 919 und 929.
Bei ihrer Ermittlung müssen einige Überlegungen angestellt werden, dabei gelangt man beispielsweise zu folgenden Erkenntnissen: Andere zweistellige ANNA-Zahlen als 11 können keine Primzahlen sein, weil sie durch 11 teilbar wären. Dreistellige ANNA-Zahlen, die auch Primzahlen sind, müssen mit eine ungerade Hunderter-/Einerziffer haben (aber nicht 5), weil sie sonst durch 2 (oder durch 5) teilbar wären.

Quelle: Mathekoffer „Zaubern, Spielen, Knobeln", 2008, Klett- und Friedrich-Verlag

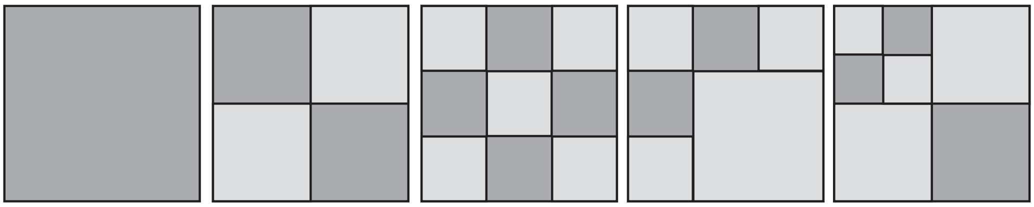
Anna und andere nette Zahlen

Eine Knobelei zum Thema Arithmetik/Geometrie

ANNA-Zahlen ergeben vorwärts und rückwärts gelesen dieselbe Zahl, so wie auch der Name ANNA vorwärts und rückwärts gelesen gleich bleibt. Ein Beispiel ist 1441. Auch 12521 und 94722749 sind ANNA-Zahlen.

Kriegt ihr raus, wie viele ANNA-Zahlen mit 1, 2, 3, 4, … Ziffern es gibt?

Man nennt eine Zahl n nett, wenn man ein Quadrat in n verschiedene Teilquadrate zerlegen kann. Die ersten drei Abbildungen zeigen, dass 1, 4 und 9 (und auch alle anderen Quadratzahlen) nette Zahlen sind. Die beiden nächsten Abbildungen zeigen, dass auch 6 und 7 nette Zahlen sind. Es wird schließlich nirgends verlangt, dass die Quadrate gleich groß sein müssen!



Zum Weiterdenken:

- Untersucht alle Teiler der ANNA-Zahlen von 1221 und 2002. Welchen gemeinsamen Teiler außer 1 gibt es noch? Untersucht andere vierstellige ANNA-Zahlen, und ihr werdet immer diesen Teiler finden. Könnt ihr das begründen?
- Wie steht es mit ANNA-Zahlen mit zwei, drei, fünf, sechs oder … Ziffern?
- Sogar manche Primzahlen sind ANNA-Zahlen. Könnt ihr einige nennen?

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - Bitte umknicken, später lesen! - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Hinweise

Zu ANNA-Zahlen werdet ihr sicher eine Regel entdecken, wenn ihr zunächst alle ANNA-Zahlen mit einer, zwei und drei Ziffern aufschreibt.

Die Idee, die zu 7 als netter Zahl geführt hat, zeigt, dass auch 8 eine nette Zahl ist. Wenn ihr die letzte Abbildung genau betrachtet, bekommt ihr sicher eine Idee, welche anderen Zahlen ganz bestimmt nett sind. Es bleiben dann nur noch ganz wenige „Problemzahlen“ übrig.