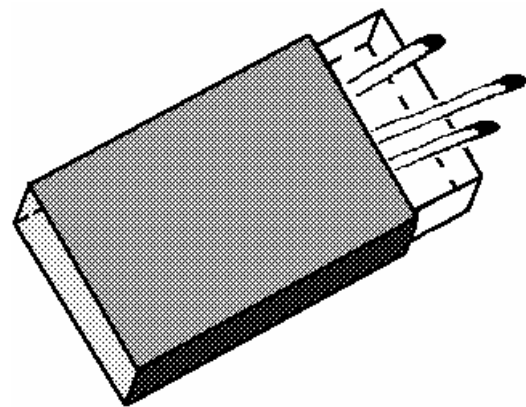
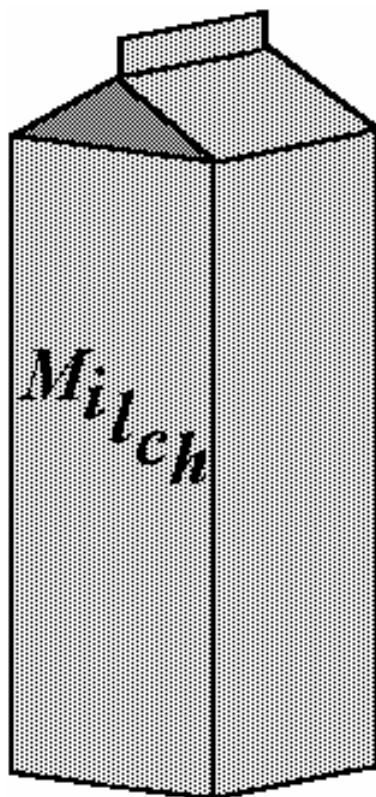


Verpackungsoptimierung



Milchtüte

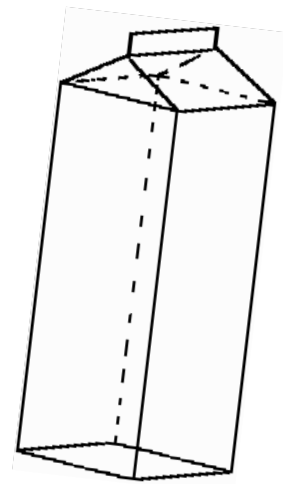
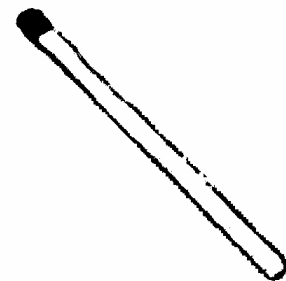
und

Streichholzschachtel

Extremwertberechnung für industriell hergestellte Massenwaren

Inhalt

Zur Broschüre: Verpackungsoptimierung	3
"Ablauf" einer Extremwertproblem-Bearbeitung	4
Die optimale Streichholzschachtel	5
Überblick	6
Ansatz I: vereinfachtes Problem	7
Reflexion der Modellannahmen und Erweiterungsmöglichkeiten	10
Ansatz II: Berücksichtigung der Seitenverstärkungen	10
Ansatz II: Allgemeine Lösung	11
Ansatz III: Verschiedene Größen von Innenteil und Hülle	12
Ansatz III: Zu einer anderen marktüblichen Streichholzschachtel	14
Antwort: Deutsche Zündholzfabrik GmbH	16
Antwort: Zündholz International	17
Geschichte: "Emotional aufgeladen"	18
Geschichte: "Das kleine Hölzchen"	20
Eine Schülerbearbeitung des Themas als Brief	24
Die materialminimale Milchtüte	25
0. Vorbemerkungen	26
1. Entwicklung der Fragestellung "Extremwertproblem"	27
2. Quantifizierung der Herstellungsbedingungen	28
Arbeitsblatt zur Milchtüte	29
3. Aufstellen der Zielfunktion	30
4. Nutzung der Nebenbedingungen	30
5. Formulierung der mathematischen Problemstellung	31
6. Nullstellen der 1. Ableitung	32
7. Prüfung des globalen Minimums	33
8. Wertung des Ergebnisses	33
9. Die materialminimale 0,5-Liter-Milchtüte	34
10. Die gemeinsame Breite als Folge von Produktionsbedingungen	35
11. Die gemeinsame Optimierung von 0,5- und 1-Liter-Milchtüte	35
12. Empfehlungen für den Unterricht	36
13. Andere Vorgehensweisen im Unterricht	36
14. Erweiterungen/Ergänzungen	37
15. Eine Anfrage beim Hersteller und die Antwort	39
16. Eine zum Thema passende Exkursion des Mathematikurses	40
Reihenüberblick Extremwertprobleme	41
Weitere MUED-Broschüren zur Funktionenlehre und Analysis	44
Initiative zur Verbesserung des Mathematikunterrichts	46
Die MUED	47



Verpackungsoptimierung

Nottuln-Appelhülsen, 2007
ISBN 978-3-930197-23-1 - € 12,50

Copyright bei den Autor/innen

Vervielfältigung für schulische Zwecke erlaubt.

Zur Broschüre: Verpackungsoptimierung

Anwendungen in der Analysis

Extremwertaufgaben sind Standardthema im Analysisunterricht. Alle firmieren unter der Überschrift "Anwendungen". Ich schlage (auch hier) vor, nur solche Problemstellungen als Anwendungen zu bezeichnen, die sich mit real vorkommenden Fragestellungen befassen. Von solchen gibt es genügend viele, um die Extremwertproblembearbeitung zu **dem** zentralen Thema des Analysisunterrichts zu machen.

Im dritten Teil dieser Broschüre 'Extremwertprobleme im Unterricht' finden Sie einen kommentierten Überblick über die Themen, zu denen in der MUED Material vorliegt, und einen Vorschlag zur Abfolge von Inhalten im Analysisunterricht. Dort (siehe Seite 40) wird auch der Stellenwert der Verpackungsoptimierung als exemplarischer Fall technischer Optimierung kritisch beleuchtet.

Ort der Bearbeitung

Wenn Sie sich auf die grafische Bearbeitung und Lösung der Problemstellungen beschränken, passen die *Streichholzschachtel* und die *Milchtüte* auch schon in die Klasse 10 und die Jahrgangsstufe 11.1. In der Analysis lasse ich Extremwertprobleme immer vor der Kurvendiskussion bearbeiten.

Was gelernt werden kann

- Mathematisierung eines technischen Problems
- Schrittweise Präzisierung der Fragestellung aus den Bedingungen der Produktion
- Schrittweise Präzisierung des Rechnungsansatzes aus den Bedingungen der Produktion
- Insgesamt: Das typische Vorgehen bei einer Modellbildung mit
 - dem 4er-Schritt: von der Realsituation über ein Realmodell zum mathematischen Modell und zur Lösung im mathematischen Modell; durch Re-Interpretation zurück zum Realproblem,
 - mehrfachem Durchlaufen der 4 Schritte, um der Realsituation angepasste mathematische Modelle und treffendere Ergebnisse zu erhalten,
 - nochmaliger Überprüfung der Realsituation nach einer Fragestellung, die sich im mathematischen Modell entwickelt.

Das typische Vorgehen bei einer Extremwertproblem-Bearbeitung ist für die Hand der Schüler/innen auf der nächsten Seite zusammengestellt. Längs dieser Abfolge sind die Fragestellungen und Lösungsabläufe in dieser Broschüre bearbeitet.

Die optimale Streichholzschachtel

"Optimal" soll die Streichholzschachtel sein. Nur – Optimierungskriterien gibt es viele: Handlichkeit, große Werbefläche, kleine Reibmaterialfläche, ... und minimaler Materialverbrauch.

Als Kriterium wird hier (nur) verfolgt:

Wie müsste die materialminimale Streichholzschachtel aussehen? Vorgegeben sind durch die Streichholzlänge, die (etwas größere) Schachtellänge und durch die Zahl der Streichhölzer das (etwas größere) Schachtelvolumen.

Mit diesen Fragestellungen können Sie in die Extremwertbearbeitung einsteigen.

Die materialminimale Milchtüte

Die marktübliche 1-Liter-Milchtüte mit quadratischer Grundfläche wird auf optimalen (hier: minimalen) Materialverbrauch untersucht. Dabei werden alle Herstellungsbedingungen der realen Milchtüte – wie Klebkanten u. ä. – berücksichtigt. Die 1-Liter-Milchtüte und die 0,5-Liter-Milchtüte liegen in ihren Abmessungen sehr nahe beim optimalen Wert. Die gemeinsame Optimierung der beiden Verpackungen liefert Überraschendes.

Die Reihe ist mathematisch anspruchsvoll. Sie erfordert u. a. die Einführung eines numerischen Nullstellenbestimmungsverfahrens.

Lesehinweise sind im Text mit einer  gekennzeichnet.

Beide Reihen sind mehrfach im Unterricht bearbeitet worden, u. a. von mir. Die Schüler/innen sind – besonders wegen der Alltagsnähe – auf die Thematik eingestiegen.

Ihnen und Ihren Schüler/innen wünsche ich ein interessiertes Arbeiten.



Überblick

"Optimal" soll die Streichholzschachtel sein. Nur – Optimierungskriterien gibt es viele: Handlichkeit, große Werbefläche, kleine Reibmaterialfläche, ... und minimaler Materialverbrauch. Das letzte Kriterium wird hier verfolgt: Wie müsste die materialminimale Streichholzschachtel aussehen? Vorgegeben sind durch die Streichholzlänge die (etwas größere) Schachtellänge und durch die Zahl der Streichhölzer das (etwas größere) Schachtelvolumen.

Im Ansatz I wird ohne Berücksichtigung von Verstärkungen und bei als gleich angenommenen Abmessungen von Hülle und Innenteil optimiert. – Siehe dann die Reflexion der Modellannahmen und Erweiterungsmöglichkeiten auf Seite 10.

Der Ansatz II berücksichtigt Verstärkungen. In der allgemeinen Lösung lassen sich die Auswirkungen von Messfehlern ablesen.

Der Ansatz III nimmt eine weitere Vereinfachung von Ansatz I zurück: er berücksichtigt die verschiedenen Abmessungen von Innenteil und Hülle an 2 marktüblichen Streichholzschachteln.

In einem Ansatz IV (hier nicht ausgeführt) könnten Preisgewichtungsfaktoren für die Reibungsfläche eingebaut werden, und das unterschiedliche Material (samt Preis) von Innenteil und Hülle könnte berücksichtigt werden.

Ein (ebenfalls nicht ausgeführter) Ansatz V könnte die Druckkosten und Werbeeinnahmen für die Deck- und (?) Bodenflächen mathematisieren (in Abhängigkeit von ihrer Größe?).

Das Extremwertproblem Streichholzschachtel

- ★ ist eine relevante Anwendung für den Unterricht, weil ein Gegenstand des alltäglichen Gebrauchs untersucht wird.
- ★ behandelt eine relevante Optimierung, weil es um ein industriell gefertigtes Massenprodukt geht, bei dem sich (schon kleine) Abweichungen vom Optimum wegen der hohen Stückzahlen ökonomisch bemerkbar machen.
- ★ beginnt mit einer Funktion in Abhängigkeit von 3 Variablen, die durch 2 Nebenbedingungen auf eine (bearbeitbare) Variable reduziert werden. Das weitet den Blick vom üblichen Standard (zwei Variablen → eine Variable) auf realitätsgerechte Extremwertprobleme und -bearbeitungen.
- ★ zeigt exemplarisch, dass und wie man von einem einfachen Modell ausgehend schrittweise Modellverfeinerungen und -erweiterungen aufnehmen kann.
- ★ lädt durch seine Open-End-Darstellung ein zu weiteren eigenen Recherchen und (probeweisen) Modellvarianten.



Streichholzschachteln, die nach anderen als Materialminimierungskriterien gefertigt sind, siehe auf Seite 13 unten.

Die materialminimale Milchtüte – eine tatsächliche Problemstellung aktueller industrieller Massenproduktion

Die marktübliche 1-Liter-Milchtüte mit quadratischer Grundfläche wird auf optimalen, hier: minimalen Materialverbrauch untersucht. Dabei werden alle Herstellungsbedingungen der realen Milchtüte – wie Klebekanten u. ä. – berücksichtigt. Die 1-Liter-Milchtüte und die 0,5-Liter-Milchtüte liegen in ihren Abmessungen sehr nahe beim optimalen Wert. Die gemeinsame Optimierung der beiden Verpackungen liefert Überraschendes. Als typisches Extremwertproblem (mit numerischer Nullpunktbestimmung) passt die Reihe in den Analysisunterricht.

0. Vorbemerkungen

0.1. Die Aufgabe

Eine "anwendungsorientierte" Standardaufgabe in Schulbüchern lautet: "Bestimme die Abmessungen der oberflächenminimalen senkrechten Säule mit quadratischer Grundfläche, die einen Liter fasst."

Mit dem üblichen Extremwertproblem-Kalkül kommt ein Würfel mit einer Kantenlänge von 10 cm heraus. Diese Aufgabenstellung kann man zum Anlass nehmen, ein ernsthaftes Optimierungsproblem zu behandeln:

Ist die marktübliche 1-Liter-Milchtüte mit quadratischer Grundfläche verpackungsminimal hergestellt?

0.2. Relevanz der Aufgabe

Die "materialminimale Milchtüte" ist ein *relevantes Extremwertproblem*.

- I. Sie ist Gegenstand alltäglichen Gebrauchs.
- II. Sie trifft den ökonomischen und ökologischen Bereich:
 - Die Milchtüte ist ein industrielles Massenprodukt. Für solche lohnt es – schon aus ökonomischen Gründen – den Materialaufwand zu minimieren. Und es lohnt, theoretisches Wissen (hier: den Extremwertproblem-Kalkül) zu investieren.
 - Als Massenprodukt stellt die Milchtüte auch ein ökologisches Problem dar – zugespitzt in der Alternative: wiederverwendbare Mehrwegflasche oder Wegwerf-Milchtüte. Wenn schon die (faktisch eindeutige) Entscheidung zugunsten der Wegwerfpackung gefällt ist, dann sollte die zumindest in ihrem dann nötigen Verpackungsaufwand minimal sein (Punkt 15).
- III. Sie ist ein typisches Beispiel für die Anwendung mathematischen Wissens:
 - Die Problemstellung zeigt exemplarisch einen Fall technischer Optimierung.
 - Das Ergebnis weist die Optimierungsrechnung als realistisch aus.

0.3. Kenntnisse, die vorausgesetzt werden

- Der Extremwertproblem-Kalkül: notwendiges, hinreichendes Kriterium für relative Extrema, Randextremaprüfung.
- Ein numerisches Nullstellenbestimmungsverfahren: hier Intervallhalbierungsmethode.
- Ableitung von Potenzfunktionen mit positiven und negativen Exponenten.

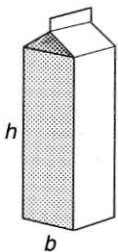
1. Entwicklung der Fragestellung "Extremwertproblem"

- Als Hausaufgabe zur Stunde kann man die Schulbuchaufgabe oben stellen und sie kurz besprechen, soweit es Schwierigkeiten mit ihrer Bearbeitung gab.
Ergebnis: die materialminimale 1-Liter-Verpackung ist der Würfel mit 10 cm Kantenlänge (sofern ein Quader mit quadratischer Grundfläche gefordert ist).
- Zeigen einer vollen 1-Liter-Milchtüte (die marktübliche mit quadratischer Grundfläche). – Naheliegende Schüleräußerungen wie: "Materialverschwendung" ... Das kann man zu einer Schüler/innenbefragung nutzen: Wer meint, dass hier unnötig Material verschwendet wurde?
- Präzisierung der Problemstellung:

Ist die marktübliche 1-Liter-Milchtüte mit quadratischer Grundfläche materialminimal gefertigt?

- Entwicklung der Extremwertproblem-Fragestellung: Bei einem großen Wert für die Breite erhält man eine "Platte" Milch - mit viel Verpackungsmaterial-Bedarf.
- Bei einem großen Wert für die Höhe erhält man eine "Stange" Milch – wieder mit viel Verpackungsmaterial-Bedarf.
- Dazwischen liegen niedrigere Werte für den Materialbedarf, also auch ein Minimum. Nach Einführung mathematischer Symbole etwa folgende Reformulierung des Problems:

Bei welcher Höhe h und Breite b ist der Materialverbrauch $M(b, h)$ der Standardmilchtüte (1000 cm^3) mit quadratischer Grundfläche minimal?



Spätestens hier: Diskussion des offensichtlich materialverschwendenden "Dach"-Aufsatzes. – Er wird produziert, damit die Milchtüte leicht zu öffnen ist und damit eine bequeme Ausgießmöglichkeit entsteht. Diese Überlegung macht in der Problemformulierung oben folgende Ergänzung nötig:

Gesucht: der minimale Materialverbrauch $M(b, h)$ der Standardmilchtüte unter Herstellungsbedingungen.

Dabei sind die Herstellungsbedingungen im Folgenden genauer erfasst.

- Soweit es sich hier ergibt (oder früher oder später): Diskussion der Relevanz dieser Fragestellung, etwa in den Punkten, die oben unter Punkt 0.2. stehen (o. ä.).

Bis hierher kann man im Unterrichtsgespräch arbeiten. Die Lehrperson kann sich weitgehend zurückhalten. Alle Beiträge zur Fragestellung liegen auf der Hand und kommen spontan von Schüler/innen. Besonderen Wert und auch Zeit sollte darauf verwandt werden, die Optimierungsfragestellung zu entwickeln und ihre Relevanz zu diskutieren. Die Fragestellung notiert man am besten an der Tafel.



Empfehlungen für die Bearbeitungsabfolge im Unterricht siehe Punkt 12.

Zu dem Gesamtprojekt ARRA der MUED halten Sie hier zwei realistische und relevante Anwendungen aus dem Bereich der Verpackungsoptimierung in Händen.

"Optimal" soll die Streichholzschachtel sein. Nur – Optimierungskriterien gibt es viele: Handlichkeit, große Werbefläche, kleine Reibmaterialfläche, ... und minimaler Materialverbrauch. Das letzte Kriterium wird hier verfolgt: Wie müsste die materialminimale Streichholzschachtel aussehen? Vorgegeben sind durch die Streichholzlänge die (etwas größere) Schachtellänge und durch die Zahl der Streichhölzer das (etwas größere) Schachtelvolumen.

Die optimale Streichholz- schachtel

Die material- minimale- Milchtüte

Die marktübliche 1-Liter-Milchtüte mit quadratischer Grundfläche wird auf optimalen, hier: minimalen Materialverbrauch untersucht. Dabei werden alle Herstellungsbedingungen der realen Milchtüte – wie Klebekanten u. ä. – berücksichtigt. Die 1-Liter-Milchtüte und die 0,5-Liter-Milchtüte liegen in ihren Abmessungen sehr nahe beim optimalen Wert. Die gemeinsame Optimierung der beiden Verpackungen liefert Überraschendes.

Der Reihenüberblick zu den Extremwertproblemen schafft Einblick in und stiftet Überblick über ein werkzeugorientiertes Projekt Extremwertprobleme.

ISBN 978-3-930197-23-1



9 783930 197231 € 12,50