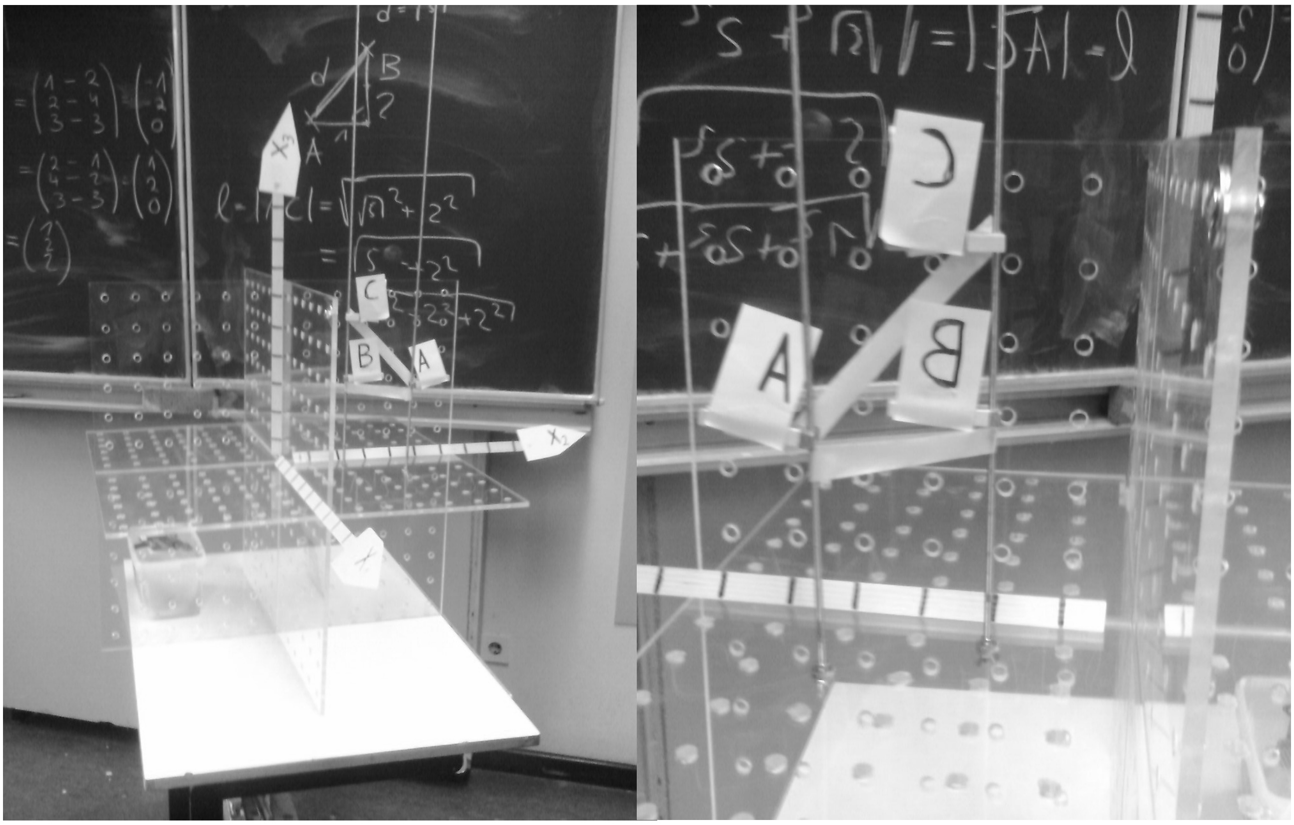

Abb.1: *Abstand zwischen zwei Punkten im 3D-Modell*

Vektoren im 3D-Modell

Analytische Geometrie mit einem räumlichen Koordinatenmodell

Volker Eisen

Bei Problemen der vektoriellen Geometrie in der Oberstufe fehlt Schülerinnen und Schülern oft eine tragfähige Vorstellung grundlegender räumlicher Begriffe. Dies liegt nicht zuletzt daran, dass räumliche Situationen kaum tatsächlich im Raum veranschaulicht und analysiert werden können – und wenn, dann nur mit erhöhtem Aufwand. Am Beispiel der Abstandsbestimmung zwischen zwei Punkten im Raum und am Beispiel einer Aufgabe zum Schattenwurf soll dafür geworben werden, dass sich der Aufwand lohnt, die Anschauung mit Hilfe eines „3D“-Koordinatenmodells zu unterstützen auf dem Weg zu einer Raumvorstellung im Kopf.

Warum ein räumliches Koordinatenmodell

Im Geometrie-Unterricht der Sekundarstufe II bildet die Entwicklung einer sicheren Raumanschauung sowohl ein zentrales Ziel als auch eine unverzichtbare Voraussetzung für die verständige Bearbeitung komplexer räumlicher Probleme mit den Hilfsmitteln der Vektorrechnung. Der Oberstufenlehrplan in NRW z.B. beschreibt den Übergang vom sinnlich erfahrbaren Raum zum „euklidischen Raum“ als bedeutende Kulturleistung. Wie kann dieser Übergang im Unterricht durch geeignetes Anschauungsmaterial unterstützt werden?

Bereits in der Sekundarstufe I untersuchen Schülerinnen und Schüler räumliche Situationen an Hand konkreter Gegenstände und Modelle (z.B. Würfelgebäude oder Verpackungen). In der Oberstufe kommt die koordinatenbezogene Darstellung dazu. Das bleibende Problem ist - wohl bis zur Wahrwerdung von bisher nur in der Science-Fiktion möglichen Projektionen - , dass jede zeichnerische Visualisierung, m.E. auch bei Computereinsatz, den erfolgreichen Übergang schon mehr oder weniger voraussetzt und eben eine materialgebundene Darstellung durch die Gesetze der Schwerkraft eng begrenzt wird bzw. einen immer wieder neu hohen Aufwand erfordert.

Einen praxistauglichen Kompromiss zwischen flexibler Darstellung und akzeptablem Materialaufwand bietet das räumliche Koordinatensystem wie in *Abb. 1*. Drei 0,65 m x 0,65m große Plexiglasplatten werden als Koordinatenebenen orthogonal ineinander gesteckt. Jede Platte ist mit einer regelmäßigen Lochung versehen, so dass unter zu Hilfenahme von Gummibändern, Hölzchen, Gewindestangen, Wäscheklammern oder selbstklebenden Notizzetteln Punkte und Punktmengen im Bereich des Koordinatenwürfels markiert werden können.

Anschauung als Ausgangspunkt für Raumvorstellung

Auch Oberstufenschülerinnen und –schülern fällt es beispielsweise häufig noch schwer, die zur Berechung des Abstands zweier Punkte im Raum erforderliche doppelte Anwendung des Satzes des Pythagoras zu erfassen. In *Abb. 1* sind die Punkte A und C als Koordinatentripel vorgegeben und von Schülern in den Raum „gestellt“ worden (der Punkt B ist ein späterer Hilfspunkt). Die Hypotenusen konnten nun z.B. mit Klebeband markiert werden. Dies führte bei den Schülerinnen und Schülern zu einem spürbaren Aha-Effekt. Die Lösung (im Hintergrund an der Tafel) wurde durch Nachmessen der Strecke AC überprüft. Mit Hilfe der Konstellation in *Abb. 1* kann auch die Pfeildeutung eines Vektors als Richtungsangabe im Raum (Malle 2005) verdeutlicht werden. Im Sinne eines „dreidimensionalen Steigungsdreieck“ (nach dem Motto eins nach rechts, zwei nach hinten, zwei nach oben) kann im Modell die Richtungsänderung konkret durch einen Vektor eingefügt werden (Klebeband mit Pfeilspitze). Diese recht einfachen Beispiel verweisen auf die Möglichkeit, auch in der analytischen Geometrie die Begriffsbildung auf eine konkrete Anschauung zu gründen.

Die Kopiervorlage (MUED 2009; die Aufgabe stammt von Philipp Hamers) zeigt nun eine komplexere Aufgabe, wie sie als sogenannte Anwendung der Vektorgeometrie typisch ist. Ohne eine tragende Vorstellung der Konstellation ist die Fragestellung nicht zu beantworten. Die Gegenüberstellung der Darstellung im Modell (Abb. 2) mit einer (sehr exakten!) Zeichnung (Abb. 3) belegt m.E. sinnfällig die Eingangsthese, dass sowohl Erstellen als auch Interpretieren einer projektiven Darstellung schon eine entwickelte Raumvorstellung voraussetzt. Immerhin muss die Idee entwickelt werden, die Grenzlinie des Schattens als Schnittgebilde aufzufassen. Eine rein zeichnerische Entscheidung, ob der Kopf der Hauptfigur im Schatten liegt, ist nicht möglich. Im Modell entsteht die Kulisse in ihrer räumlichen Ausdehnung ebenso können nun die idealisierten Darsteller aufgestellt werden. Eventuell genügt dies schon, um eine Lösungsidee zu entwickeln. Weitergehend kann das Problem aber nun auch unter Einsatz einer Taschenlampe experimentell untersucht werden. Der Materialeinsatz eröffnet also individuelle Zugänge zur Entwicklung einer Lösungsidee und damit auch differenzierte Ausgangspunkte für Abstraktionsleistungen.

Weitere Möglichkeiten

Mit den noch verhältnismäßig einfachen Hilfsmitteln des 3D-Koordinatensystems werden im Unterricht von den Anfängen der Koordinatendarstellung bis hin zur Untersuchung beispielsweise platonischer Körper gegenständliche Raumerfahrungen als Ausgangspunkt von Abstraktionen möglich:

- Auffinden von Punkten im Raum; Benennung gegebener Punkte;
- Darstellung einer Raumdiagonale und Entwicklung der Abstandsformel;
- Entwicklung der Parameterform von Gerade und Ebene;
- Visualisierung des Normalenvektors;
- Darstellung von Körpern durch Vektorzüge und Veranschaulichung von Schnittgebilden;
- Untersuchung von Lagebeziehungen (z.B. die Frage von Herrn Falk ...);
- ...

In der Regel wird man nicht mehrere dieser Modelle zur Verfügung haben. Doch schon mit einem Modell im Klassenraum sind verschiedene didaktisch-methodische Arrangements realisierbar, sobald die Arbeit in freieren Formen organisiert wird, so dass nicht alle Schülergruppen gleichzeitig Zugriff auf das Modell benötigen. So können die Schülerinnen und Schüler (vorzugsweise in Gruppen):

- eine zuvor aufgebaute Konstellation mit Vektoren beschreiben;
- eine beschriebene Konstellation im Modell nachbauen;
- rechnerische Lösungen kontrollieren, insb. bei Schnittproblemen;
- Zusammenhänge und Gleichungen begründen;
- Produkte ihrer Arbeit im Plenum präsentieren.

Die Arbeit am großen Modell kann durch kleine Pappmodelle, die die Schülerinnen und Schüler selber basteln, unterstützt werden. Drei Pappen sind schnell zu Koordinatenebenen zusammengesteckt; Holzspieße übernehmen die Funktion der Stangen im großen Modell. Somit können spezielle Situation recht schnell vergegenwärtigt werden, wenngleich die Pappmodelle nicht sehr flexibel sind.

Auch beim Plexiglasmodell setzt die Physik natürlich Grenzen, so können in den Koordinatenebenen ausschließlich ganzzahlige Koordinaten dargestellt werden. Jede gewählte Einheit kann nur bis zum siebenfachen Betrag in der Darstellung vorkommen. Dennoch stellt die prinzipielle Möglichkeit der räumlich-gegenständlichen Darstellung einen großen Gewinn dar, auch wenn diese auf exemplarische Fälle beschränkt bleibt. Die Begrenzung des Materials ist dann der Anlass für die Lösung von der Anschauung im Sinne des Übergangs zum euklidischen Raum.

Literatur:

Malle, Günther (2005): Neue Wege in der Vektorgeometrie. In: mathematiklehren 133, S. 8-14.

MUED (Hrsg.): Broschüre zum 3D-Modell. BücherBunt, Appelhülsen. (Erscheint in der zweiten Jahreshälfte 2009).

Volker Eisen
Archigymnasium Soest, Studienseminar Arnsberg
volker.eisen@hammkomm.de

Kopiervorlage

Wilder Westen

Der Regisseur einer Western Parodie lässt den finalen Showdown drehen. Die Zeit am heutigen Drehtag ist allerdings schon vorangeschritten. Der Regisseur hat Sorge, dass die beiden Hauptdarsteller bald vom Schatten der Kulisse getroffen werden.

Die schattenwerfende Kulisse in der Nähe der Schauspieler ist eine Kirchen-Attrappe, die mit folgenden Punkten beschrieben werden kann: P_1 (1/0/0), P_2 (1/0/2), P_3 (4/0/2), P_4 (4/0/4), P_5 (5/0/6), P_6 (6/0/4), P_7 (6/0/0). (Alle Einheiten sind in Metern angegeben.)
Die beiden Darsteller sollen auf den Punkten P_8 (3,5/4/0) und P_9 (1/4/0) stehen und ihr Duell austragen. (Zur Vereinfachung können die Schauspieler als Strecken ohne Breite angesehen werden.)

Die Sonnenstrahlen scheinen z.Zt. in die Richtung (-1/2/-2).

Skizzieren Sie die Szene und/oder bauen Sie die Szene im 3-D-Modell nach.
Prüfen sie, ob die Köpfe der 1,7 Meter hohen Duellanten im Schatten liegen und erläutern Sie ihren Lösungsweg. Wie wird sich die Situation in den nächsten Stunden verändern?

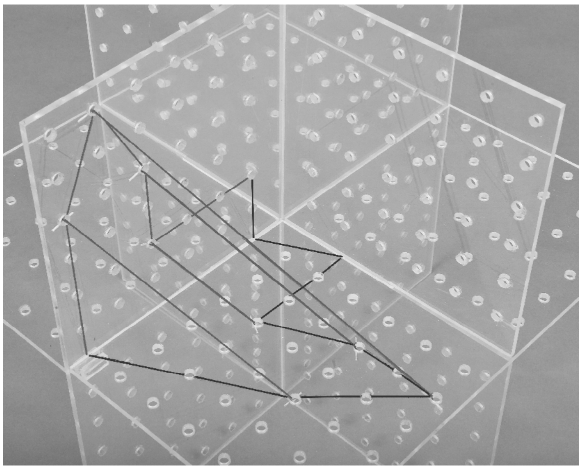

***Abb. 2:** Mögliche Lösungen – im Modell...*

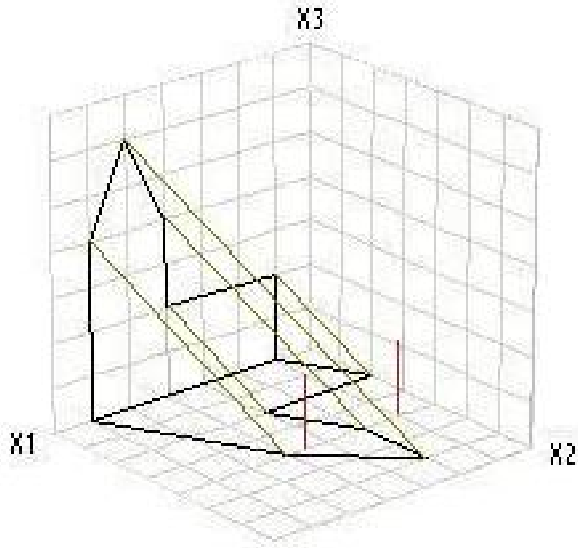

***Abb. 3:** ... und als Skizze.*